

# Оптимизация вычислений при моделировании волновых процессов

Лытаев Михаил Сергеевич  
к.т.н., с.н.с.

Лаборатория прикладной информатики СПИИРАН - СПб ФИЦ РАН

5 апреля 2024



# Содержание

- Предыстория и мотивация
- Базовая математическая модель
- Оптимизация оператора распространения
- Стохастическая модель для учета неопределенностей
- Валидация
- Практические результаты и показатели

## Предыстория и мотивация

- Диссертация «Разработка и исследование методов численного решения задачи распространения электромагнитных волн в неоднородной тропосфере» по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в 2019 году в СПбГУТ им. М.А. Бонч-Бруевича
  - ▶ Параметры методов нужно выбирать вручную
  - ▶ Как интегрировать такие модели в сложные программные системы?
  - ▶ В различных предметных областях (гидро, атмосферная и сейсмоакустика, радиофизика, оптика, квантовая механика) используются похожие математические модели, а методы их решения зачастую переизобретаются. Принцип универсальности мат. моделей.
  - ▶ Хочется как-то системно посмотреть на данную проблему
- Прогресс в области методов оптимизации
- Цель работы: повышение эффективности численных методов решения задач распространения волн в неоднородных волноводах

# Базовая математическая модель

- Уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 n^2(x, y, z) \psi = 0, \quad (1)$$

- Начальное условие

$$\psi(0, y, z) = \psi_0(y, z)$$

- Граничные условия (прозрачные)

- Особенности

- ▶ Огромный размер расчетной области по сравнению с длиной волны
- ▶  $n^2(x, y, z)$  - функция весьма произвольного вида (разрывы, высокая вариация)
- ▶ Наблюдается все разнообразие эффектов распространения: интерференция, дифракция, рефракция, множественное переотражение
- ▶ Эта «простая» модель лежит в основе значительного числа более сложных, по этому важно уметь эффективно ее вычислять

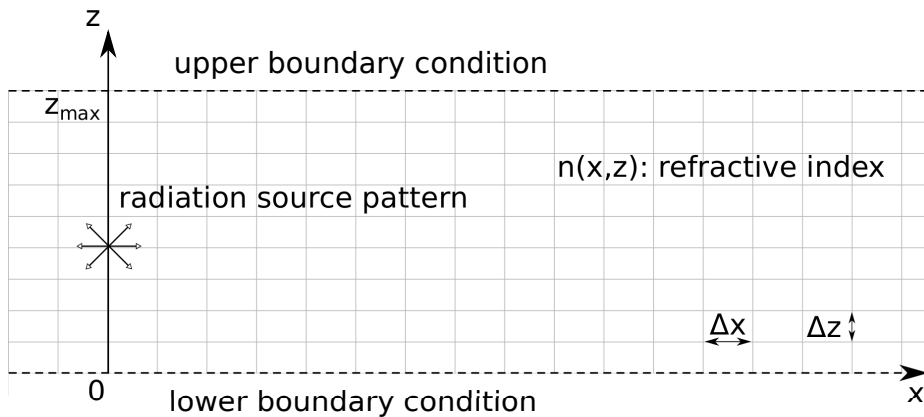


Рис.

# Примеры. Гидроакустика

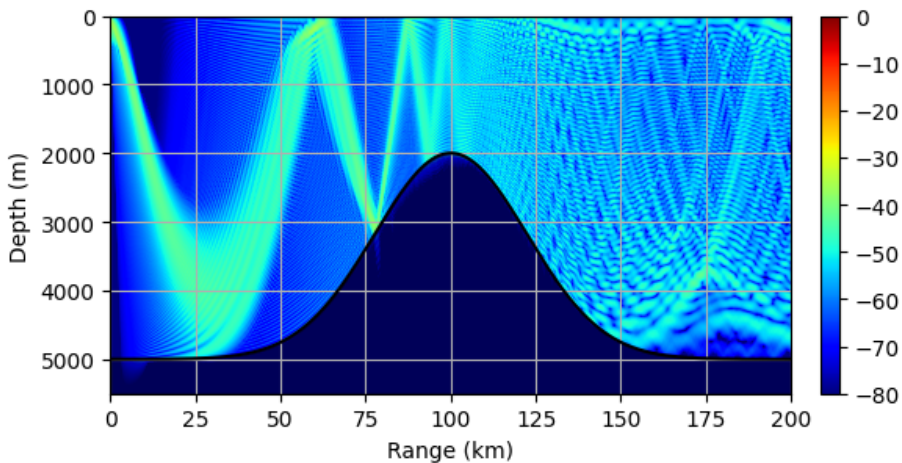


Рис.

# Примеры. Тропосферное РРВ

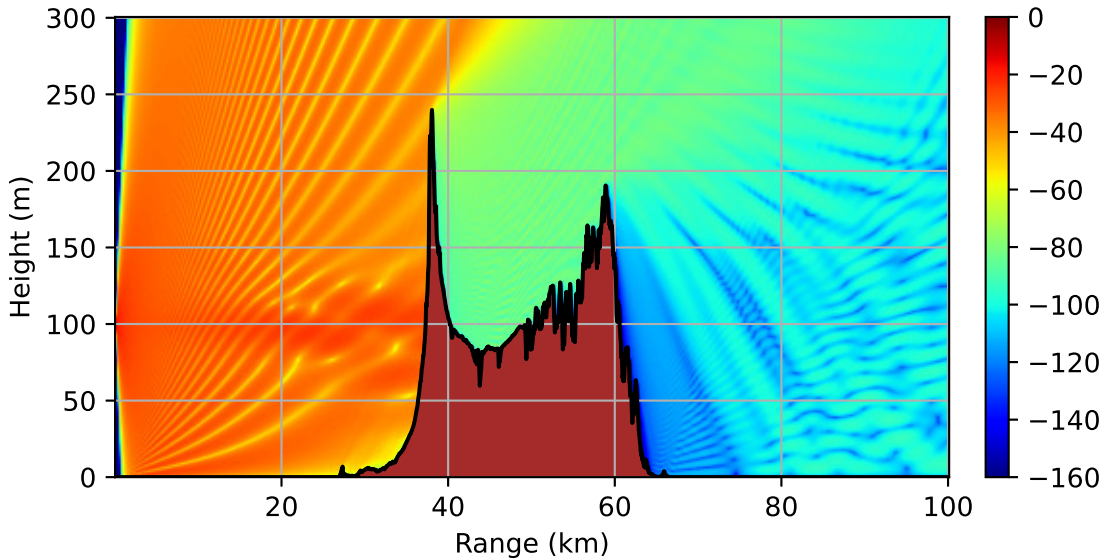


Рис.

# Однонаправленное уравнение Гельмгольца

Псевдодифференциальный оператор распространения

$$u(x + \Delta x, y, z) = \exp \left( i\beta \Delta x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{k^2}{\beta^2} n^2(x, y, z) - 1 - 1} \right) \right) u(x, y, z) \quad (2)$$

Учитывает интерференцию, дифракцию, рефракцию

Не учитывает образное рассеяние и множественное переотражение

- Спектральные методы
  - ▶ Вычислительно эффективны
  - ▶ Плохо учитывают ГУ
  - ▶ Ограничения на  $n^2$
- Конечно-разностные методы
  - ▶ Моделирование произвольных ГУ
  - ▶ Нет ограничений на  $n^2$
  - ▶ Множество различных аппроксимаций и искусственных параметров



## Какие задачи описывает эта модель?

- Распространение радиоволн вблизи поверхности Земли
- Распространение акустических волн в морской среде
- Распространение акустических волн в тропосфере
- Распространение акустических колебаний в грунте
- Распространение оптических волн в волноводах

## Аппроксимация двумерного оператора распространения

$$\exp\left(i\beta\Delta x\left(\sqrt{1+L}-1\right)\right) \approx \frac{\prod_{l=1}^n 1+a_l L}{\prod_{l=1}^m 1+b_l L} = \prod_{l=1}^p \frac{1+a_l L}{1+b_l L} \quad (3)$$

$$Lu = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (n^2(x, z) - 1) u$$

## Оптимизация расчетной сетки

Задача: найти оптимальные параметры расчетной сетки  $(\Delta x, \Delta z)$  и порядок аппроксимации  $(p)$

Дискретное дисперсионное соотношение

$$\tilde{k}_x(\Delta x, \Delta y, \Delta z, a_1 \dots a_p, b_1 \dots b_p, \theta) = k + \frac{\ln \prod_{l=1}^p t_l}{i \Delta x},$$

$$t_l = \frac{1 + a_l \xi_d^z}{1 + b_l \xi_d^z}, \quad \xi_d^z = -\frac{1}{\beta^2 \Delta z^2} \sin^2 \left( \frac{k_z \Delta z}{2} \right) - \frac{4\alpha}{\beta^2 \Delta z^2} \sin^4 \left( \frac{k_z \Delta z}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{k^2}{\beta^2} - 1 \right).$$

Истинное дисперсионное соотношение

$$k_x(\theta) = k \cos \theta$$

## Оптимизация расчетной сетки

Ошибка дискретного дисперсионного соотношения (локальная ошибка)

$$R(\Delta x, \Delta y, \Delta z, a_1 \dots a_p, b_1 \dots b_p, \theta) = |\tilde{k}_x - k_x|$$

Задача оптимизации

$$\frac{\rho}{\Delta x \Delta z} \rightarrow \min$$

при условии

$$R(\Delta x, \Delta y, \Delta z, a_1 \dots a_p, b_1 \dots b_p, \theta) < \varepsilon \frac{\Delta x}{x_{max}}, \quad \theta \in [0, \theta_{max}]$$

- Установлена взаимосвязь между параметрами расчетной сетки, параметрами рациональной аппроксимации, максимальным углом распространения и ошибкой численной схемы
- Позволяет получить оптимальную сетку для заданного максимального угла распространения
- Не учитывает вариации  $n^2$

## Оптимизация с учетом индекса преломления

Используя теорию псевдодифференциальных операторов, были получены следующие оценки на точность аппроксимации

$$R(\Delta x, \xi_1, \xi_2) = \left| \exp \left( i\beta \Delta x \left( \sqrt{1 + \xi_1} - 1 \right) \right) - \prod_{l=1}^p \frac{1 + a_l \xi_2}{1 + b_l \xi_2} \right|.$$

$$R(\xi) = R(\Delta x, \xi, \xi)$$

$$\xi = -\frac{k^2}{\beta^2} \sin^2 \theta + \frac{k^2}{\beta^2} n^2(x, z) - 1$$

Оптимальный коэффициент распространения

$$\beta_{\text{opt}} = k \sqrt{\frac{v_{\min} + v_{\max} - \sin^2 \theta_{\max}}{2}}, \quad n^2(x, z) \in [v_{\min}, v_{\max}]$$

# Оптимизация с учетом индекса преломления

$$\Delta x \Delta z \rightarrow \max$$

при условии

$$\tau(\Delta x, \Delta z) \cdot n_{steps} < \varepsilon, \quad (4)$$

$$\tau(\Delta x, \Delta z) = \sup_{|\xi_1 - \xi_2| < k_0^{-2} h(\Delta z), \xi_1, \xi_2 \in [\xi_{min}, \xi_{max}]} R(\Delta x, \xi_1, \xi_2).$$

Получен метод оптимизации расчетной сетки, порядка аппроксимации и коэффициента распространения в зависимости от максимального угла распространения, коэффициента преломления и требуемой точности

## Рациональная интерполяция на отрезке

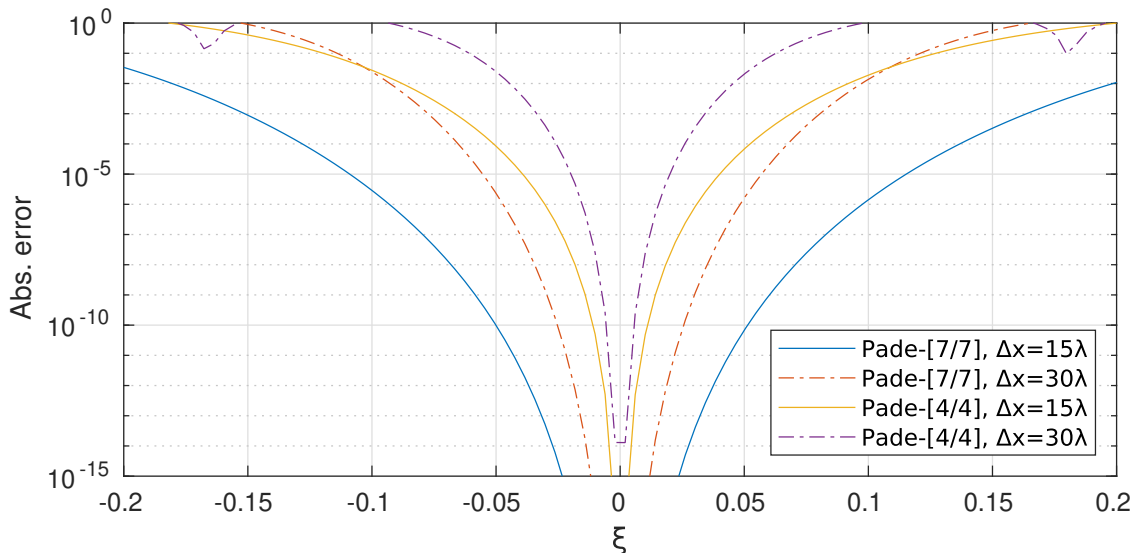


Рис.: Dependence of the Padé approximation error on the value  $\xi$  for various approximation orders ([4/4] and [7/7]) and longitudinal grid steps  $\Delta x$  ( $15\lambda$  and  $30\lambda$ ).

## Рациональная интерполяция на отрезке

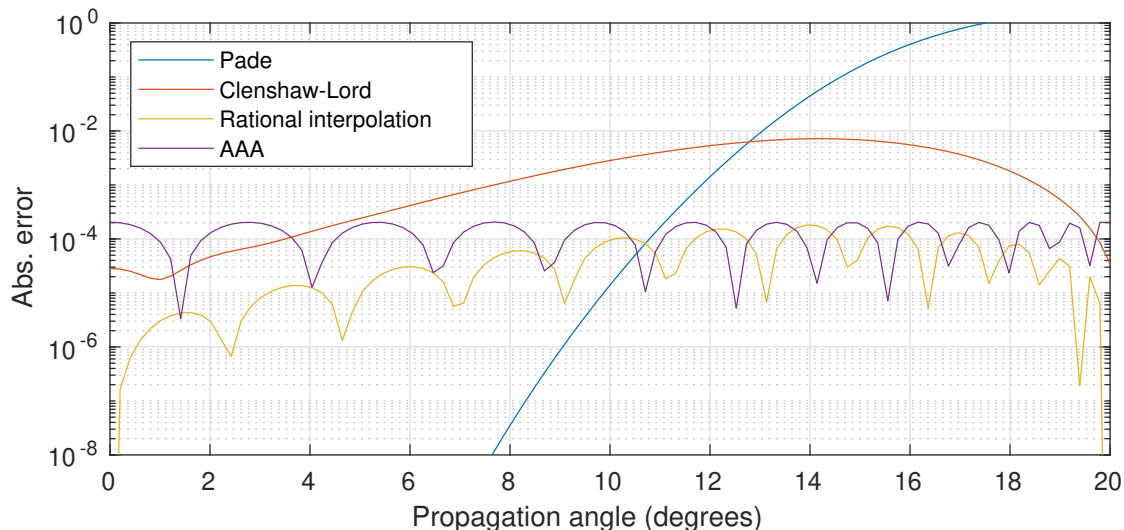


Рис.: Dependence of the approximation error  $R$  on the propagation angle for the Padé approximation, Clenshaw-Lord approximation, rational interpolation in the Chebyshev roots and AAA method. In all cases  $\Delta x = 50\lambda$ , rational approximation order is [6/7].



## Рациональная интерполяция на отрезке

Исследованы различные методы рациональной аппроксимации на отрезке: Clenshaw-Lord, Rational interpolation, AAA

Макс. угол распространения $\theta_{max}$	3°	10°	20°	45°	60°	80°
Оптимальный $\Delta x$ для аппроксимации Паде	600 $\lambda$	50 $\lambda$	11 $\lambda$	1.5 $\lambda$	-	-
Оптимальный $\Delta x$ для рациональной интерполяции	2600 $\lambda$	200 $\lambda$	40 $\lambda$	8 $\lambda$	4 $\lambda$	1.4 $\lambda$

Таблица: оптимальные значения шага  $\Delta x$  (больше - лучше). Порядок аппроксимации [7/8].

## Рациональная интерполяция псевдодразностного оператора

Обобщение теории псевдодифференциальных операторов на псевдодразностные

$$P \approx P_1 P_2 = \exp(i\beta \Delta x (n(x, z) - 1)) \exp\left(ik\Delta x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} - 1\right)\right) \quad (5)$$

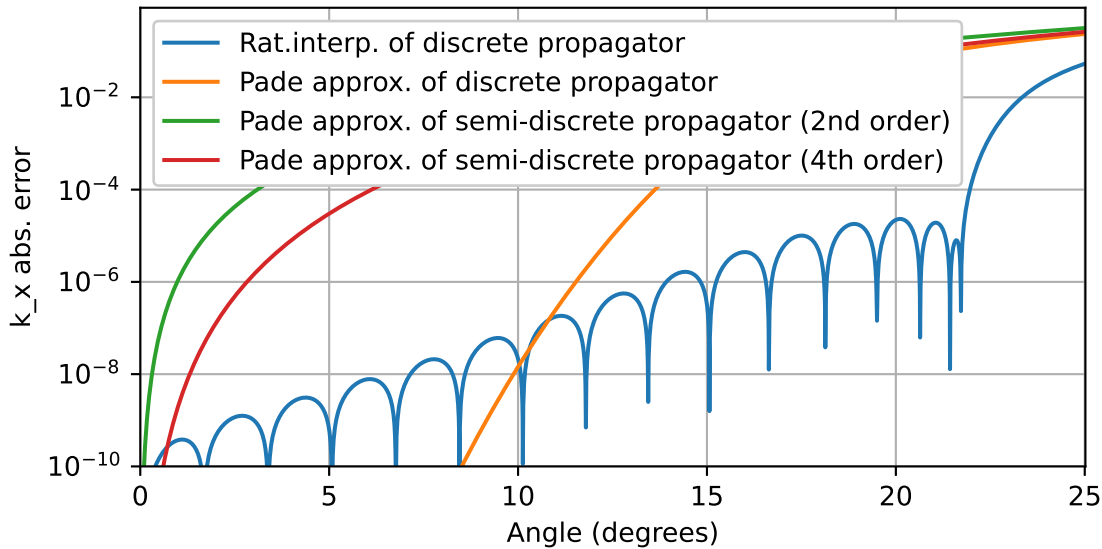
$$P_2(\delta^2) = f(\delta^2) = \exp\left(ik\Delta x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} g(\delta^2)} - 1\right)\right).$$

$$g(\xi) = -\frac{1}{\Delta z^2} \ln^2\left(1 + \frac{\xi}{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)^2 - 1}\right),$$

$$f(\xi) u \approx \prod_{l=1}^p \frac{1 + a_l \xi}{1 + b_l \xi} u, \quad (6)$$

$$\xi \in \left[-4 \sin^2\left(\frac{k \sin \theta_{\max} \Delta z}{2}\right), 0\right]$$

# Рациональная интерполяция псевдоразностного оператора



- Коэффициенты рациональной аппроксимации определяются как решение задачи минимизации дисперсионного соотношения
- Известны:  $\Delta x, \Delta z$ , максимальный угол распространения  $\theta_{max}$

$$\operatorname{argmin}_{a_1 \dots a_p, b_1 \dots b_p} \left[ \max_{k_z \in [0, k_z^{max}]} \frac{1}{k} |\tilde{k}_x(k_z, \Delta x, \Delta z, a_1 \dots a_p, b_1 \dots b_p) - k_x(k_z)| \right] \quad (7)$$

# Стохастическая оптимизация

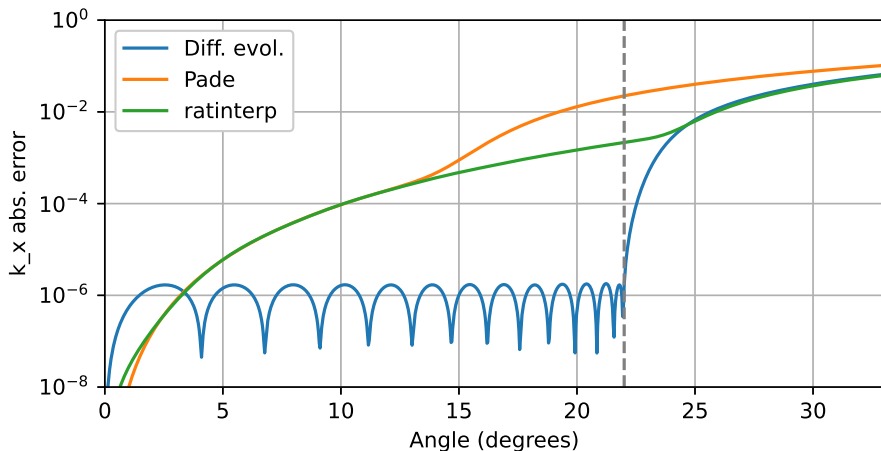


Рис.: Dependence of the discrete dispersion relation error on the propagation angle for the Padé approximation, rational interpolation and the proposed method. In all cases  $\Delta x = 50\lambda$ ,  $\Delta z = 0.25\lambda$ , approximation order is equal to  $[6/7]$ ,  $\theta_{max} = 22^\circ$ .

Acceptable error  $\varepsilon$  at distance  $x_{max}$  from the start propagation point are given

$$\operatorname{argmax}_{\Delta x, \Delta z, a_1 \dots a_p, b_1 \dots b_p} [\Delta x \Delta z],$$

on condition

$$\max_{k_z \in [0, k_z^{max}]} \frac{1}{k \Delta x} |\tilde{k}_x(k_z, \Delta x, \Delta z, a_1 \dots a_p, b_1 \dots b_p) - k(k_z)| < \frac{\varepsilon}{x_{max}}.$$

# Стохастическая оптимизация

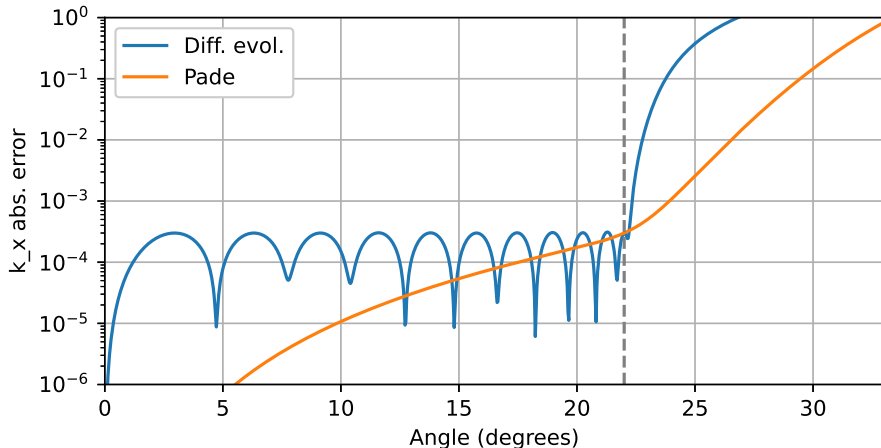


Рис.: Dependence of the discrete dispersion relation error on the propagation angle at distance  $x_{max}=3E3\lambda$  for the Padé approximation ( $\Delta x = 10.8\lambda$ ,  $\Delta z = 0.005\lambda$ ) and the proposed approach ( $\Delta x = 46.9\lambda$ ,  $\Delta z = 0.67\lambda$ ). In all cases approximation order is equal to  $[6/7]$ ,  $\theta_{max} = 22^\circ$ , desired accuracy  $\varepsilon=3e-4$ .

## Условие устойчивости

$$\forall k_z \operatorname{Im} \left( \tilde{k}_x(k_z) \right) > 0.$$

$$\left| \prod_{l=1}^p \frac{(k\Delta z)^2 - 4a_{lx}}{(k\Delta z)^2 - 4b_{lx}} \right| < 1, \quad x \in [0; 1]. \quad (8)$$



## Дифракция на клине. Метод дифф. эволюции

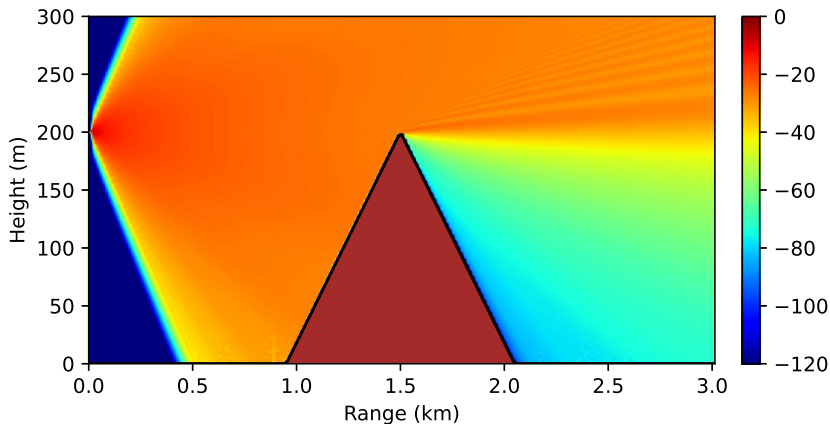


Рис.: Wedge diffraction. Spatial distribution of the field amplitude ( $20 \log |\psi|$ ), obtained by the proposed method.  $\Delta x = 46.9\lambda$ ,  $\Delta z = 0.67\lambda$ , approximation order is equal to  $[6/7]$ .

## Дифракция на клине. Аппроксимация Паде

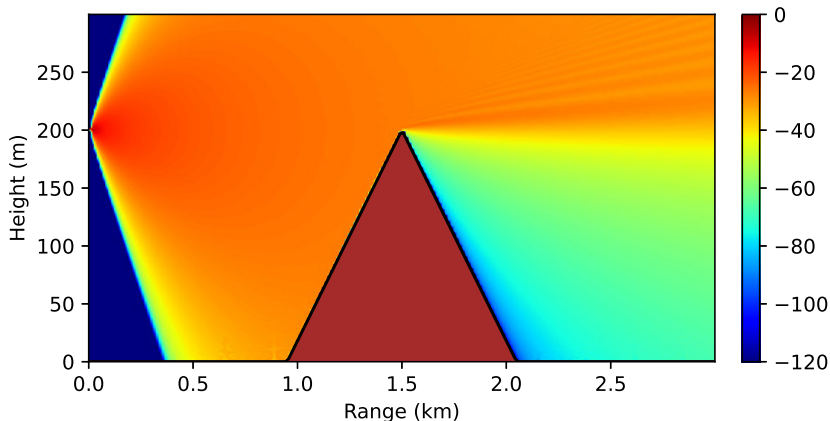


Рис.: Wedge diffraction. Spatial distribution of the field amplitude ( $20 \log |\psi|$ ), obtained by the Padé method.  $\Delta x = 10.8\lambda$ ,  $\Delta z = 0.005\lambda$ , approximation order is equal to  $[6/7]$ .

## Дифракция на клине. Аппроксимация Паде

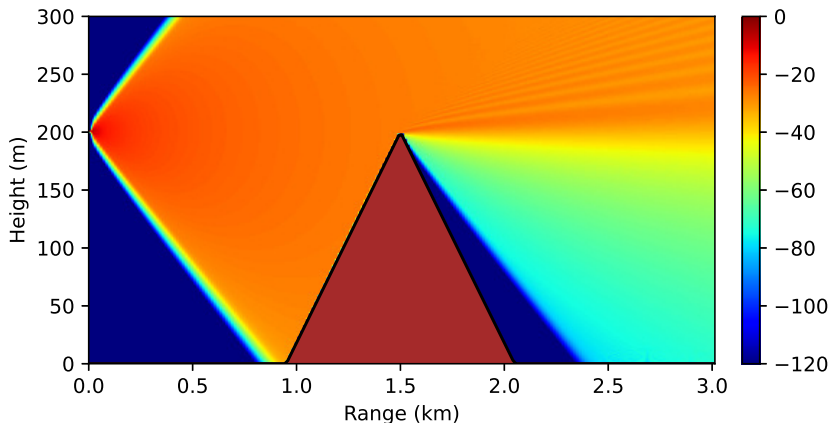


Рис.: Wedge diffraction. Spatial distribution of the field amplitude ( $20 \log |\psi|$ ), obtained by the Padé method.  $\Delta x = 46.9\lambda$ ,  $\Delta z = 0.67\lambda$ , approximation order is equal to  $[6/7]$ .

## Дифракция на клине. Условие устойчивости

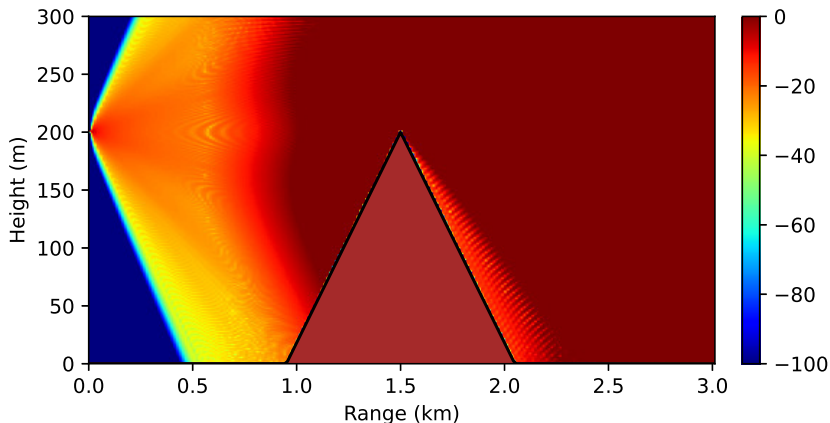


Рис.: Wedge diffraction. Spatial distribution of the field amplitude ( $20 \log |\psi|$ ), obtained by the proposed method without stability condition.  $\Delta x = 46.9\lambda$ ,  $\Delta z = 0.67\lambda$ , approximation order is equal to  $[6/7]$ .

# Стохастическая оптимизация

$x_{max}$ ( $\lambda$ )	$\varepsilon$	$\theta_{max}$ ( $^\circ$ )	Padé approximation		DE (proposed)		Runtime gain ( $r$ )
			$\Delta x$ ( $\lambda$ )	$\Delta z$ ( $\lambda$ )	$\Delta x$ ( $\lambda$ )	$\Delta z$ ( $\lambda$ )	
3000	3E-4	3	1563.2	3.01	2661.0	6.9	3.9
		10	69.5	0.06	291.8	2.5	174.9
		22	10.8	0.005	46.9	0.67	591.9
		30	5.12	0.002	23.3	0.32	728.1
		45	1.6	0.0004	9.1	0.07	995.3
		60	-	-	1.1	0.007	-
		90	-	-	0.5	0.0005	-
100	1E-2	45	3.7	0.02	16.8	0.65	147.6
		60	1.5	0.007	8.6	0.45	368.6
		90	-	-	3.3	0.11	-

Таблица: Optimal values of the grid steps  $\Delta x$  и  $\Delta z$  for the Padé approximation method and the proposed approach. “-” means that reasonable values could not be obtained.

- Дальнейшее развитие
  - ▶ Рассмотреть другие типы аппроксимации и топологии численных схем
  - ▶ Построение новых топологий численных схем при помощи генетического программирования

# Трёхмерный оператор распространения

- Расщепление

$$L_d^{ADI} u = \left[ \frac{1}{\beta^2} D_{\Delta y} + \frac{1}{2} \left( \frac{k^2}{\beta^2} - 1 \right) \right] \left[ \frac{1}{\beta^2} D_{\Delta z} + \frac{1}{2} \left( \frac{k^2}{\beta^2} - 1 \right) \right] u. \quad (9)$$

- Показано, что существующие методы расщепления работают лишь для очень малых углов распространения
- Расщепление при помощи стохастической оптимизации

# Результаты

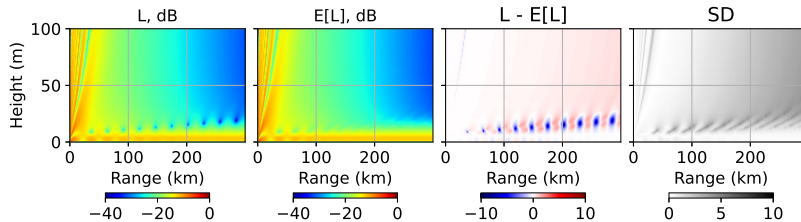
- Не требует существенных изменений в существующие программные реализации
- Установлена количественная взаимосвязь между параметрами численной схемы, углом распространения, неоднородностями и точностью вычислений
- Разработаны методы выбора оптимальных расчетных параметров в зависимости от конкретной задачи
- Скорость вычислений увеличена в 10-100 раз
- Увеличены границы применимости (повышен максимальный угол распространения)
- Показано, что свойства численной схемы (точность, устойчивость) могут быть заданы априорно



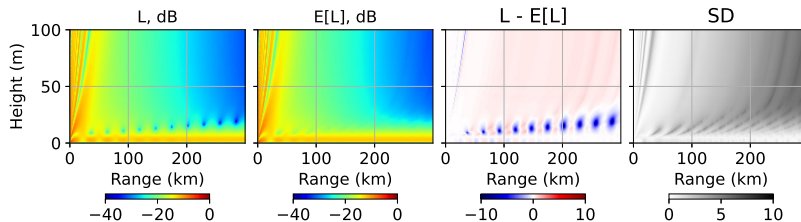
# Стохастическое уравнение

- Параметры среды никогда не известны точно, обычно в виде случайной величины
- Учет неопределенностей - многократный расчет прямой задачи
- Показано, что количественно неопределенности тропосферы или скорости звука в океане могут оказывать значительное влияние
- Разрабатываются эффективные алгоритмы учета неопределенностей

# Неопределенность волновода испарения



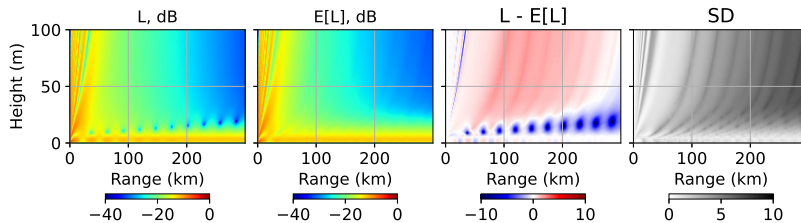
(a)  $\sigma_h = 0.5$  m



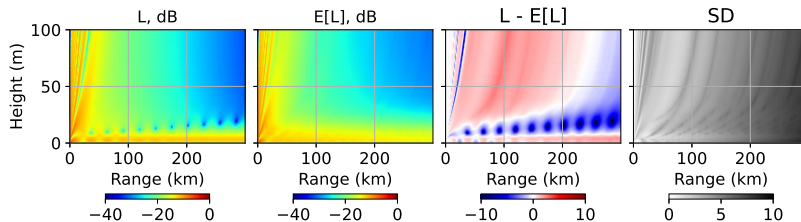
(b)  $\sigma_h = 1.0$  m

Рис.: Comparison of simulation results for various values of the ED height SD ( $\sigma_h$ ).  $f = 10$  GHz,  $h_{src} = 10$  m,  $h_e = 20$  m.

# Неопределенность волновода испарения



(a)  $\sigma_h = 2.0$  m



(b)  $\sigma_h = 4.0$  m

Рис.: Comparison of simulation results for various values of the ED height SD ( $\sigma_h$ ).  $f = 10$  GHz,  $h_{src} = 10$  m,  $h_e = 20$  m.

# Обратные задачи

- Почти все алгоритмы (согласованные со средой) основаны на многократном решении прямой задачи
- Поиск источника излучения
  - ▶ В условиях множественного переотражения
- Оптимизация расположения источников излучения
- Определение неоднородностей в среде по данным измерений
  - ▶ Строится нейронное псевдодифференциальное уравнение

# Согласованное со средой местоопределение ИРИ

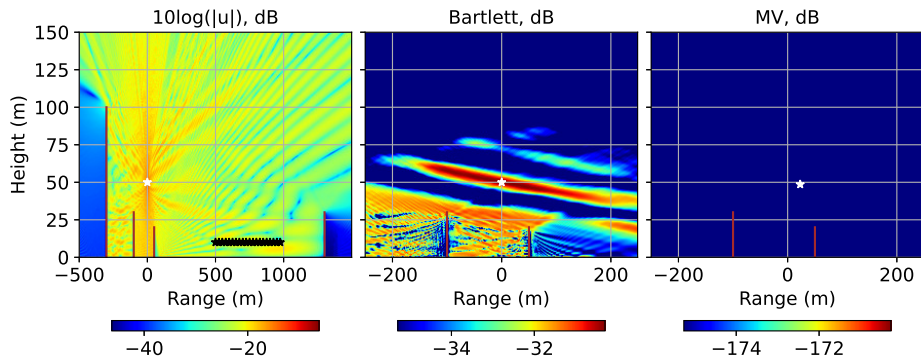
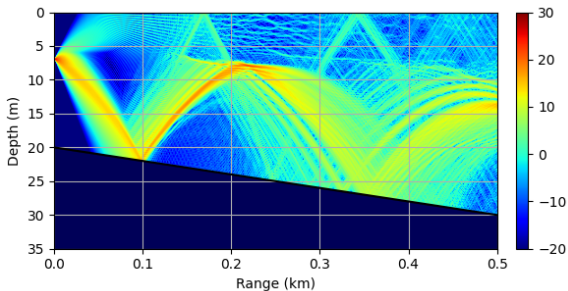


Рис.

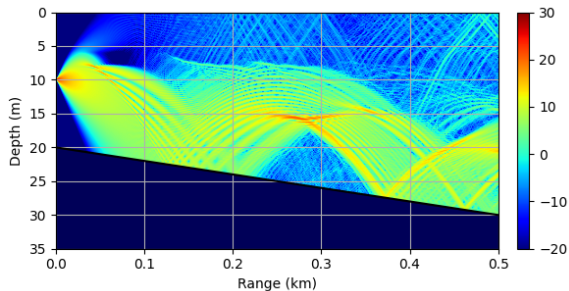
- Сравнение с альтернативными моделями и численными методами
  - ▶ Универсальные методы и программные пакеты
    - ★ на практике малоэффективны, но можно использовать для сравнения
  - ▶ Решение модельных задач для частных случаев
- Сравнение в экспериментами
  - ▶ экспериментальных данных мало
  - ▶ проводить измерения долго и дорого
  - ▶ погрешности, ошибки
  - ▶ не покрывают даже малой части возможных эффектов и явлений
  - ▶ преимущество междисциплинарного подхода в возможности проверять на различных экспериментальных данных

# Моделирование ультразвуковой установки для борьбы с цианобактериями

- ультразвук -> маленькая длина волны -> требуется густая сетка
- Выбор и обоснование оптимальной диаграммы направленности



(a)

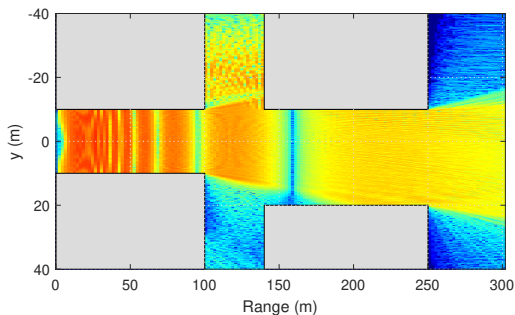


(b)

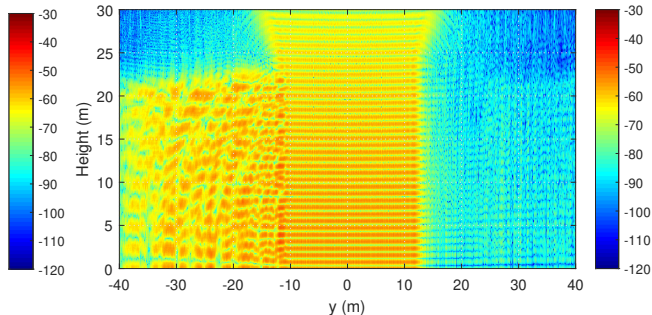
Рис.: Пространственное распределение амплитуды акустических волн в термоклине.

# Моделирование зоны видимости в сетях VANET

- существенно трехмерная среда, частота 5 ГГц -> маленькая длина волны -> требуется густая сетка
- получены количественные характеристики распространения и влияния различных неоднородностей



(a)



(b)

Рис.: Распространение радиоволн на перекрестке.



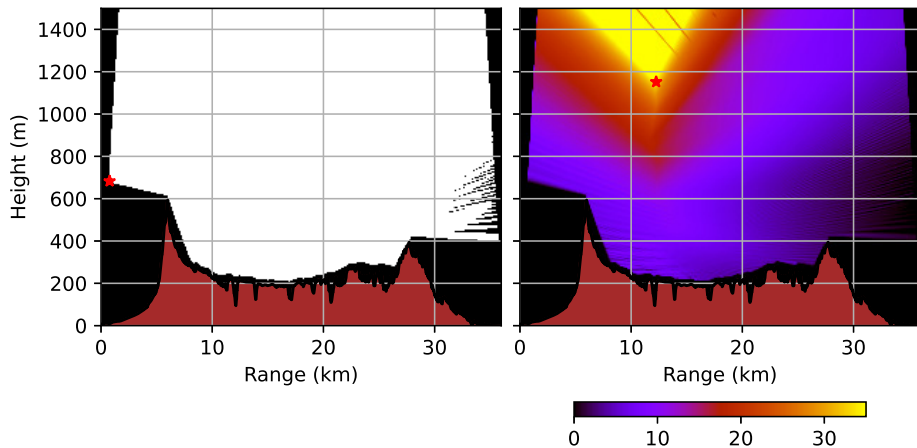
# Моделирование зоны видимости в сетях VANET

- Распространение в прямой видимости возможно на расстояниях, превосходящих 700 м от источника
- Без прямой видимости уровень сигнала существенно зависит от взаимного расположения зданий и антенн в зоне распространения
- При планировании беспроводных сетей в условиях отсутствия прямой видимости использование средств моделирования распространения волн является обязательным
- Легковые автомобили не оказывают существенного влияния на уровень сигнала
- Грузовые автомобили и автобусы могут способствовать затуханию на 10-20 дБм
- Влияние трафика более заметно в свободном пространстве без массивных препятствий, чем в волноводе городского каньона;
- Высота зданий не оказывает серьезного влияния на распространение, т.к. волны способны огибать здания сверху, если его высота превышает 4-5 этажей

# Моделирование зоны видимости в сетях VANET

- В качестве баз данных расположения зданий и зеленых насаждений можно использовать данные картографического сервиса OpenStreetMap
- Метод трехмерного двунаправленного ПУ может эффективно применяться в задаче распространения радиоволн в условиях городской застройки
- Полноценные (indoor) трёхмерные реализации метода RT требуют больших вычислительных затрат при моделировании в реальных городских условиях,
- а упрощенные (outdoor) версии оставляют вопросы к своей адекватности и надежности, т.к. в них не проявляются некоторые важные эффекты распространения.

# Моделирование ретранслятора на базе БПЛА



(a)

Рис.: Оптимальное расположение ретранслятора в горах.



- Моделирование тропосферного распространения радиоволн над неровным рельефом, растительностью, в тропосферном волноводе
- Распространение акустических волн в неоднородной морской среде
- Автоматический выбор расчетных параметров
- Визуализация
- <https://github.com/mikelytaev/wave-propagation>

# Показатели (с 2020 года)

- Публикации
  - ▶ 6 статей в журналах Q1/Q2
  - ▶ 2 статьи ВАК
  - ▶ 9+2(приняты) статей в трудах международных конференций (A, TopConf)
- Гранты
  - ▶ Грант РФФИ № 21-71-00039 2021-2023 г (Руководитель)
  - ▶ Грант РФФИ № 23-71-01069 2023-2025 г (Руководитель)
  - ▶ НИР № ПЗЗ-1-26/9 от 15.06.2020. Федеральное агентство связи. 2020. (Исполнитель)
  - ▶ Бюджетная НИР FFZF-2022-0003 (Исполнитель)
- Конкурс на лучшую научную работу СПб ФИЦ РАН
  - ▶ Победитель (2022, 2023)
  - ▶ Призер (2020, 2021)