



Некоммерческое партнёрство  
«ИНСТИТУТ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ БОРЬБЫ  
ЗА ЖИВУЧЕСТЬ КОРАБЛЯ, СУДНА»  
(ИАП БЖКС)

---

Россия, Санкт-Петербург, 198262, Ленинский пр., д. 101, пом. 162  
т. (812) 455.2363, +7 909 580.2155, [iapbgks@bk.ru](mailto:iapbgks@bk.ru), [www.iapbgks.ucoz.ru](http://www.iapbgks.ucoz.ru)

**101-летие теоремы  
Уиттекера-Котельникова-Шеннона  
и  
67-летие теории информации:  
исследования, обобщения и  
приложения**

Докладчик: д.т.н. профессор *Алексеев Анатолий Владимирович*

## Основные вопросы

### **Фундаментальное значение теоремы отсчетов Уиттекера-Котельникова-Шеннона:**

Краткий обзор этапов развития теории информации, теоремы УКШ и их приложений.

Теория ценности информации и квалиметрия сигналов. Информационная избыточность.

### **Обобщенное выражение выбора граничных и оптимального значений частоты дискретизации реальных полосовых сигналов:**

Спектральная интерпретация физических процессов выборки сигналов при их дискретизации и классификация погрешностей преобразования процессов.

Методика, алгоритм и примеры оптимизации частоты дискретизации сигналов и информационной избыточности при различных моделях представления формы спектра



# 1. Фундаментальное значение теоремы отсчетов Уиттекера-Котельникова-Шеннона

**Основные этапы становления и развития исследований  
в области теории отсчетов и её приложений**

Год, автор	Основной результат исследования	Особенности
1915, E.T. Whittaker [1]	О функциях, которые используются в расширении теории интерполирования	Впервые сформулирована зависимость
1927, W.L. Ferrar [2]	О содержании кардинальной функции интерполяции	Ввел понятие кардинальных функций
1928, H. Nyquist [3]	Некоторые зависимости в телеграфной теории передачи	Введено понятие частоты Найквиста
1928, Хартли Р.В.Л.	Теория информации и её приложения	Прикладные аспекты
1929, J.M. Whittaker [4]	Теория Фурье кардинальных функций	Обобщение рядов
1933, В.А. Котельников [5]	О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи. 9 теорем дискретизации	Теорема 5 для полосовых сигналов
1946, Gabor D.	Теория связи и основные приложения	Интерпретация
1949 (1963), Шеннон К. [6]	Связь при наличии шума. Обобщенное доказательство теоремы отсчетов для задач связи	Теорема введена в теорию связи
1949, I. Someya [7]	Приложение к теории передачи сигналов	Приложения УКШ
1953, A. Kohlenberg [8]	Точная интерполяция <u>группа-ограниченные</u> функции. Дискретизация <u>p-го</u> порядка	Разложение в ряд полосовых сигналов
1956, D.L. Jagerman, L.Fogel [9]	Некоторые общие аспекты теоремы отсчетов	Интерполяционное обобщение УКШ
1956, J.L. Yen [10]	Неравномерная дискретизация ограниченных по полосе частот сигналов	<u>Неравностоящие</u> дискретные отсчеты

1958, Турбович И.Т. [11]	Теорема отсчетов при неограниченном спектре	Обобщенный ряд
1957, Голдман С.	Теория информации и основные приложения	Интерпретация УКШ
1957, Weiss [12].	Теорема выборки для задач и систем Штурма-Лиувилля	Обобщение теоремы отсчетов Вайсса-Крамера (УКШК)
1959, Н.Р. Kramer [13]	Обобщенная теорема выборки для интегрального преобразования Ганкеля (Бесселя)	
1959, Billings A.R. [14]	Дискретизация сигналов полосой частот, имеющей нижнюю частоту, не равную нулю	Графическая интерпретация УКШ
1959, Цыбаков Б.С., Яковлев В.П. [15]	О точности восстановления функций с помощью конечного числа членов ряда Котельникова	Анализ ошибок дискретизации
1960, Игнатъев Н.К. [16]	Общие методы исследования дискретизации	Обобщение методов
1061, F.M. Reza [17]	Введение в теорию информации	Многомерная теорема
1961, Мидлтон Д.	Введение в статистическую теорию связи	Интерпретация УКШ
1962, A. Papoulis [18]	Интеграл Фурье и его приложения	Учет реального фильтра обработки сигнала
1971, Стейн С., Джонс Д.	Принципы современной теории связи и их применение к передаче дискретных сообщений	Прикладные аспекты реализации УКШ
1972, Гаарднер Н.О. [20]	О многомерной теореме отсчетов	Обобщение теорем
1974, Кэтермоул К.В.	Принципы импульсно-кодовой модуляции	Приложение УКШ
1975, Стратонович Р.Л.	Современная теория информации	Интерпретация УКШ
1976, Бабенко В.И. [21]	Предварительная фильтрация при анализе спектра полосовых сигналов.	Учет погрешностей преобразования
1977, А. Дж. Джерри [22]	Теорема отсчетов Шеннона, её различные обобщения и приложения. Обзор	Обзор вклада различных исследователей
1977, Хургин Я. И., Яковлев В. П. [23]	Анализ трудов по теории финитных функций и ее применения в физике и технике	Аналитический обзор и интерпретация УКШ
1979, Шавельский Ю.И., Алексеев А.В. [24]	Способ дискретизации реальных полосовых непрерывных процессов (УКШр)	Обобщение теоремы для реальных сигналов
2004, Басараб М. А., Зелкин Е.Г., Кравченко ВФ.[32].	Цифровая обработка сигналов на основе теоремы УКШ	Аналитический обзор трудов по УКШ

## 2. Теорема отсчетов Уиттекера-Котельникова-Шеннона

В современном варианте оригинальная формулировка теоремы отсчетов УКШ, как правило, представляется следующим образом [22].

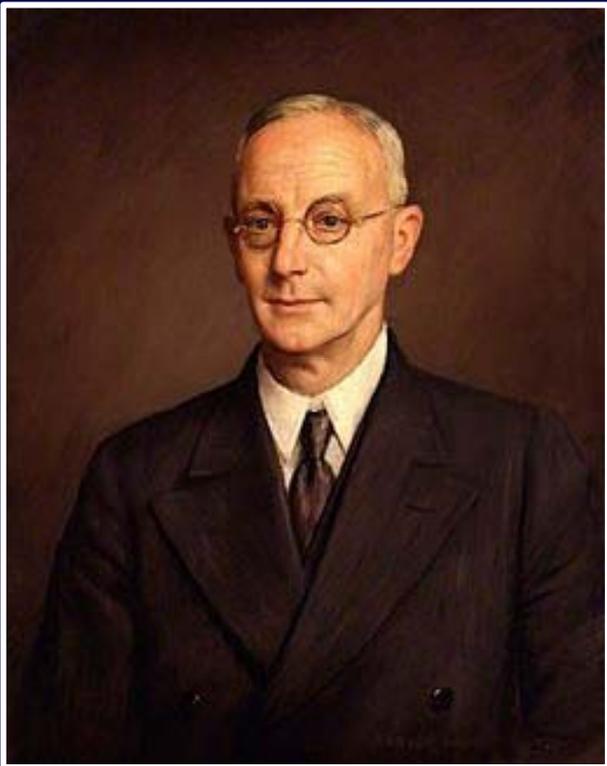
Теорема отсчетов УКШ: Если функция  $f(t)$  не содержит частот выше  $W$  Гц, то она полностью определяется своими мгновенными значениями в моменты, отстоящие друг от друга на  $1/2W$  сек.

По мнению А. Дж. Джерри, схема доказательства К. Шеннона [6] и метод записи  $f(t)$  в форме ряда дискретных отсчетов

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)} \quad (1)$$

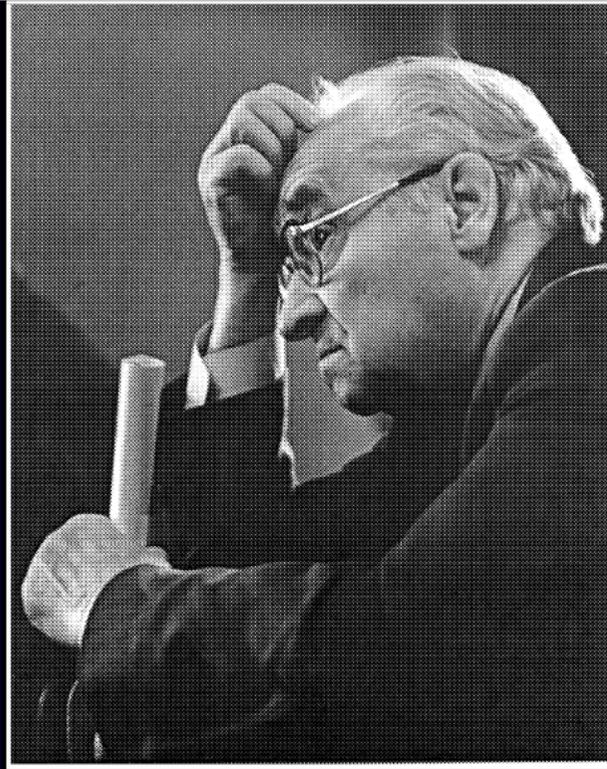
аналогична описанным в работе [4] Дж. М. Уиттекера. По существу К. Шеннон ввел впервые, по мнению Джерри, физический смысл понятий времени и частоты в теорему отсчетов, в которой ряд (1) представляет собой кардинальный ряд Эдмунда Уиттекера [1].

1. E.T. Whittaker, "On the function which are represented by the expansion of interpolating theory", Roy. Soc. Edinburgh, vol. 35, pp.181-194, 1915.
2. W.L. Ferrar, "On the consistency of cardinal function interpolation", Proc. Roy. Soc. Edinburgh, vol. 47, pp. 230-242, 1927.
3. H. Nyquist, "Certain topica in telegraph transmission theory", AIEE Trans., vjl. 47, pp. 617-644, 1928.
4. J.M. Whittaker, "The Fourier theory of the cardinal functions", Proc. Roy. Soc. Edinburgh, vol. 1, pp.169-176, 1929.
5. Котельников В.А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи. – В кн.: Материалы по радиосвязи к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции свя-зи. Всесоюзный энергетический комитет, 1933.
6. C. E. Shannon. Communication in the presence of noise. Proc. Institute of Radio Engineers. Vol. 37. No. 1. P. 10—21. Jan. 1949.  
Шеннон К. Связь при наличии шума. – В кн.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963, с. 433-460.
7. I. Someya, Waveform Transmission.Tokyo: Shukyo, Ltd., 1949.
8. A. Kohlenberg, "Exact interpolation of band-limited functions", J. Appll. Physssiiics, vol. 24, pp. 1432-1436, 1953.
9. D.L. Jagerman and L.Fogel. "Some general aspects of the sampling theorem", IRE Trans. Inform. Theo-ry, vol. IT-2, pp.139-146, Dec. 1956
10. J.L. Yen, "On the nonuniform sampling of band width limited signals", IRE Trans. Circult Theory, vol. CT-3, pp. 251-257, Dec. 1956.
11. Турбович И.Т. К вопросу о применении теоремы Котельникова к функции времени с неограни-ченным спектром. Радиотехника, 1958, т.13, № 8, с. 11-12.
12. Weiss, "Sampling theorems associated with Sturm-Liouville systems", Bull. Math. Soc., vol. 63, p. 242, 1957.
13. H.P. Kramer, "A generalized sampling theorem", J. Math. Phys., vol. 38, pp. 68-72, 1959.



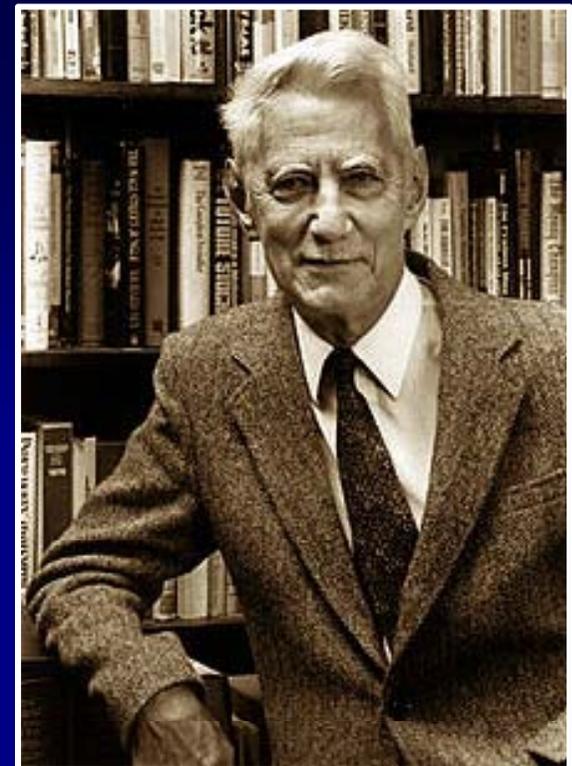
**Эдмунд Тейлор  
Уиттекер**

**1908.10.24-2005.03.24**



**Владимир Александрович  
Котельников**

**1908.08.24-2005.02.11**



**Клод Элвуд  
Шэннон**

**1916.04.30-2001.02.24**

**Теорема V.** Любую функцию  $F(t)$ , состоящую из частот от  $f_1$  до  $f_2$ , можно непрерывно передавать с любой точностью при помощи чисел, передаваемых друг за другом через  $1/[2(f_2 - f_1)]$  секунд.

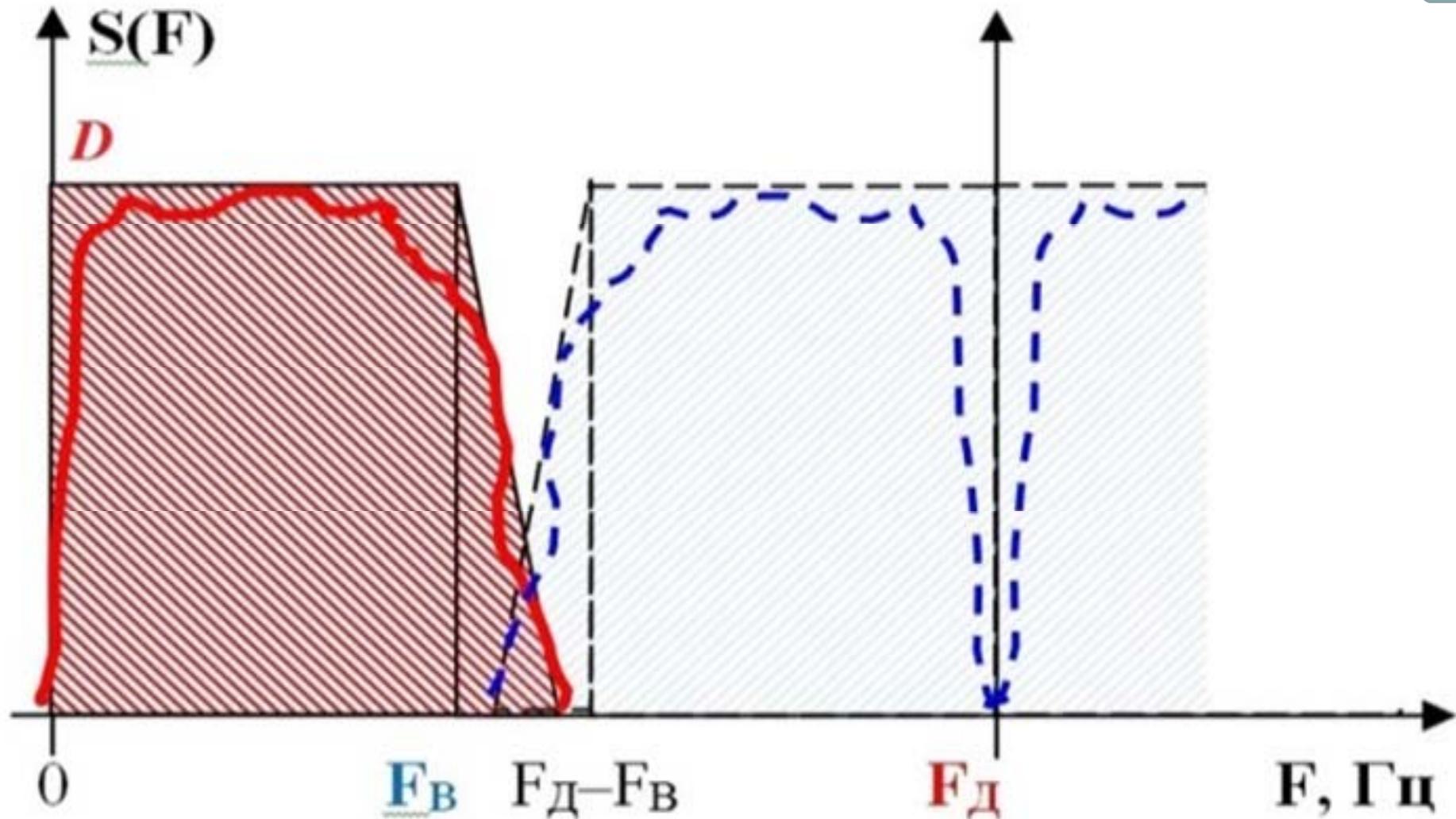


Рис. 1. Спектральная интерпретация процесса дискретного преобразования неполосового сигнала

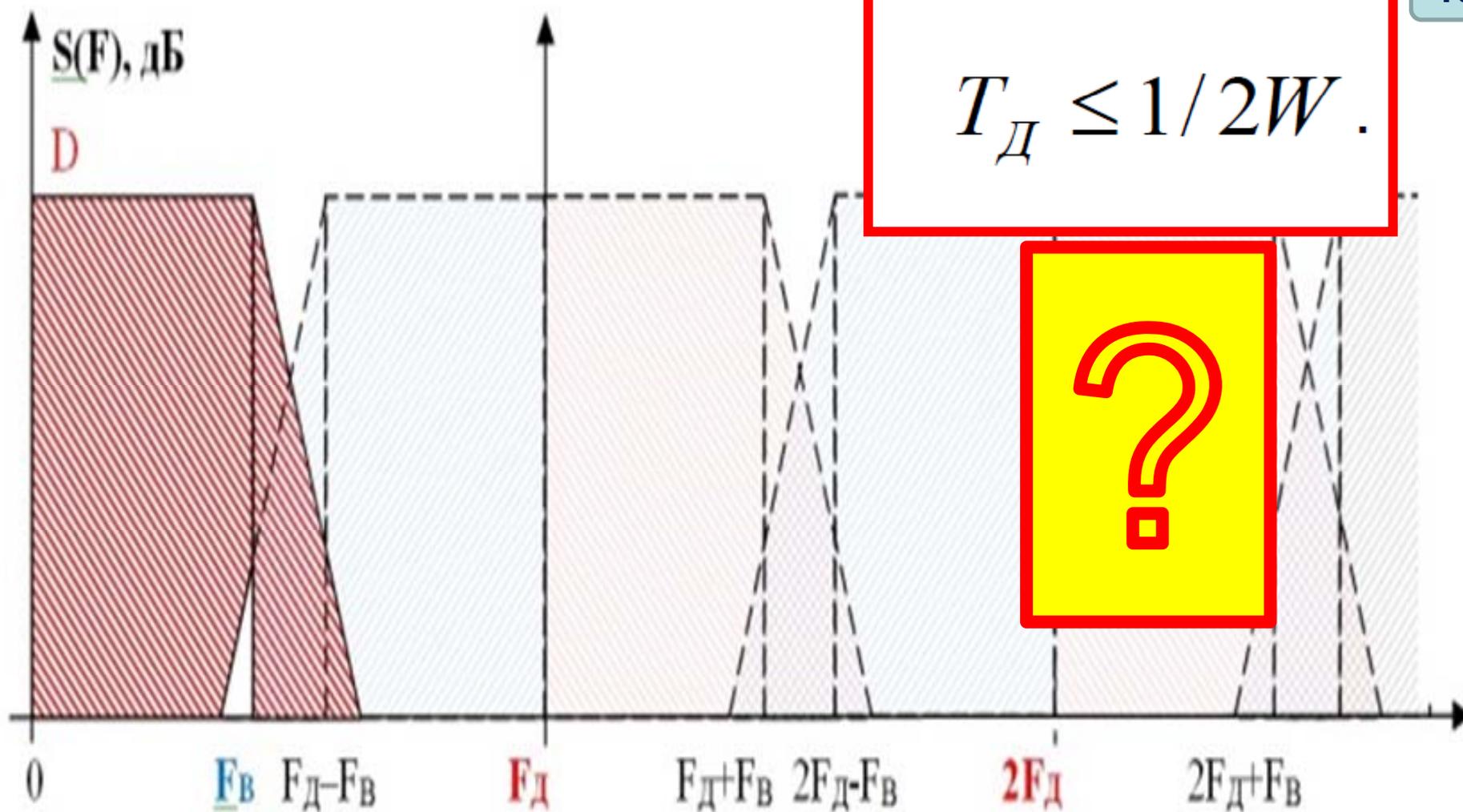


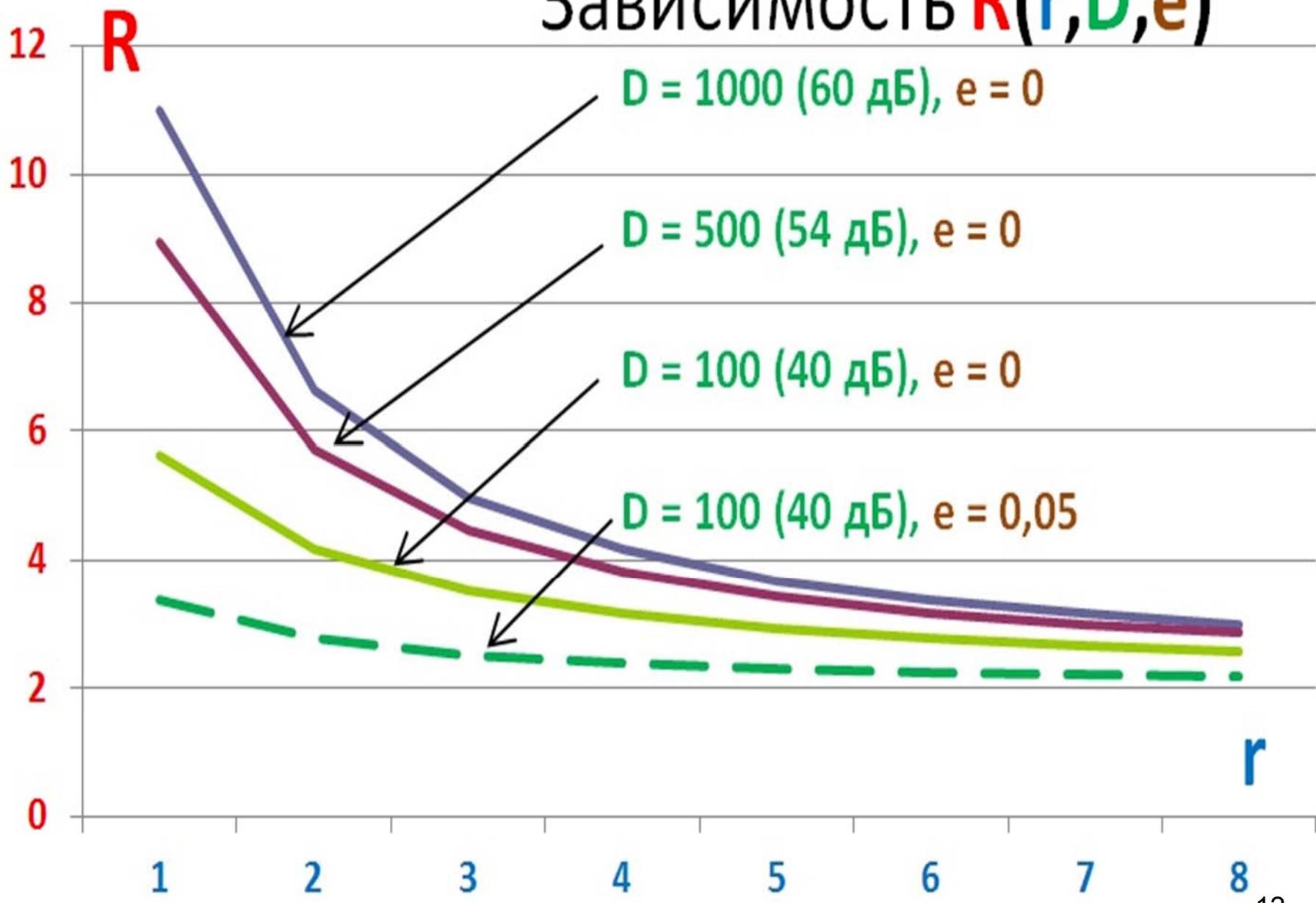
Рис. 3. Спектральная интерпретация процесса дискретного преобразования реального сигнала

$$F_D \geq R \times F_B, \quad (9)$$

$$R = 1 + \left[ \varepsilon^2(2r - 1) + D^{\frac{1}{r}-2} \right]^{\frac{-1}{(2r-1)}}, \quad (10)$$

$$R = 1 + \left[ \frac{\varepsilon^2(2m+2r-1)}{1-2m} + \frac{\left(\frac{F_H}{F_B}\right)^{\frac{m}{m+r}-2m}}{D^{2-1/(m+r)}} \right]^{\frac{-1}{(2m+2r-1)}}. \quad (14)$$

# Зависимость $R(r, D, e)$



Теорема УКШр: Если спектральная плотность  $S(F)$  функции времени  $s(t)$  может быть представлена функцией вида

$$S(F) = D \left( F/F_H \right)^s \left( F_H/F \right)^m \left( F_B/F \right)^r, \quad (17)$$

где  $s$ ,  $m$ ,  $r$  – параметры формы спектра по крутизне наклона огибающей спектральной плотности функции  $S(F)$  соответственно по низкочастотному срезу (НЧС) в диапазоне частот  $[0; F_H]$ , по сплошной части спектра (СЧС) в диапазоне частот  $[F_H; F_B]$  с полосой частот  $\Delta F$ , по высокочастотному срезу (ВЧС) в диапазоне частот  $[F_B; \infty)$  функции  $s(t)$ , вне указанных диапазонов частот соответственно  $s=0$ ,  $m=0$ ,  $r=0$ , то при допустимой относительной погрешности наложения спектров (интерференционных погрешностей) по НЧС  $e_H$ , по ВЧС  $e_B$ , функция времени  $s(t)$  полностью определяется своими мгновенными значениями в моменты времени, отстоящими друг от друга на  $(1/F_D)$  секунд, а допустимое значение частоты дискретизации (частоты выборки) функции  $s(t)$  должно выбираться из обобщенного условия вида:

$$F_D = \Gamma \times \Delta F, \quad (18)$$

где значение обобщенного параметра дискретизации (относительной частоты дискретизации) выбирается из граничного условия

$$\frac{(1+L)R}{1+k} \leq \Gamma \leq \frac{LS}{k}, \quad (19)$$

$k = 1; 2; 3, \dots; k_{max}$  – целочисленное значение, определяющее порядок (моду) дискретного представления функции времени  $s(t)$ ;

$$L = F_H / \Delta F - \quad (20)$$

- относительное значение (местоположение) полосы частот  $\Delta F$ , как правило, на уровне -3 дБ;  
 $S \in [0; 2]$ ,  $R \in [2; \infty)$  – обобщенные параметры учета ограниченной крутизны наклона огибающей спектральной плотности по НЧС и ВЧС с соответствующими диапазонами изменения значений и алгоритмами определения в зависимости от заданных значений погрешностей по НЧС  $e_H$  и по ВЧС  $e_B$ , относительной величины (динамического диапазона)  $D$  изменения значений функции  $s(t)$ , крутизны наклона спектральной плотности по НЧС  $s$ , по СЧС  $m$  и по ВЧС  $r$ .

Следствие 1: Минимально избыточным значением частоты дискретизации является значение  $F_D$  при максимальном целочисленном значении порядка дискретного представления

14

$$k_{max} = INT\{1/[(1 + 1/L) \frac{R}{S} - 1]\}, \quad (21)$$

которое определяется только соотношением обобщенных параметров учета ограниченной крутизны наклона спектра по ВЧС и СЧС  $R/S$ , относительной полосой частот (местоположением полосы частот)  $L$ , а также оператором целочисленного значения в выражении (21)  $INT$ .

Причем, для идеально ограниченных спектров с  $R = 2$  и  $S = 2$  имеет место значение  $R/S = 1$ , при котором  $k_{max} \rightarrow \infty$ , а значение  $\Gamma \rightarrow 2$ .

Данный частный вид условия по теореме УКШр полностью совпадает с классическим случаем выбора частоты выборки для восстановления сигнала по теореме УКШ и УКШК при идеально ограниченном спектре сигнала [1, 3, 5, 6, 14].

Следствие 2: Для  $k$ -того порядка (моды) дискретного представления функции времени узлы (вершины клиньев) допустимых значений частот дискретизации имеют параметры

$$L_k = 1 / \left[ \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \frac{S}{R} - 1 \right], \quad (22)$$

$$\Gamma_k = L_k S / k = (1 + L_k) R / (1 + k). \quad (23)$$

полезными могут быть условия выбора среднеарифметического или среднегеометрического значений обобщенного параметра в виде

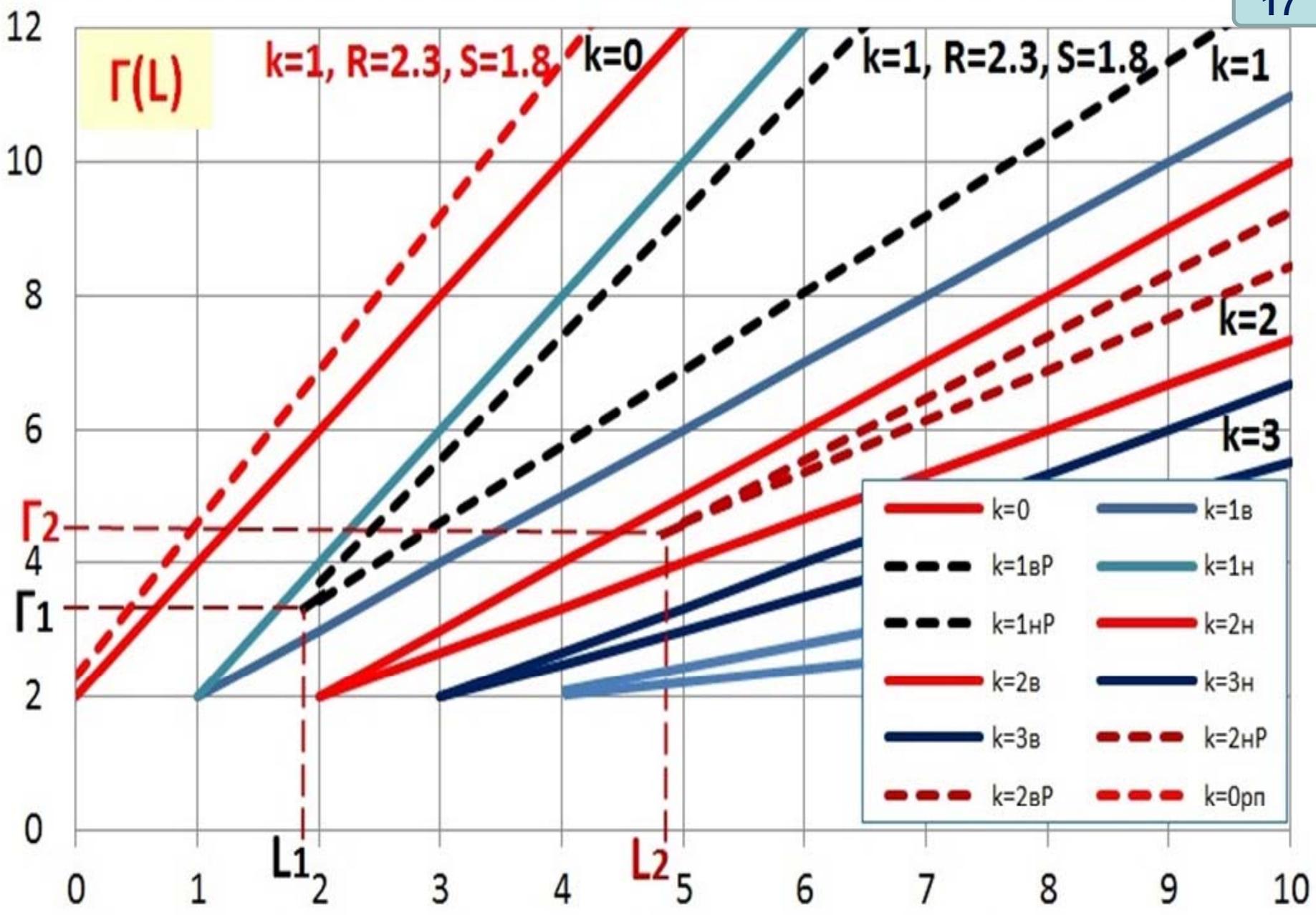
$$\Gamma_k^A = \frac{(1+L)R}{2(1+k)} + \frac{LS}{2k}, \quad (24)$$

$$\Gamma_k^\Gamma = \left[ \frac{(1+L)R}{4(1+k)} \frac{LS}{k} \right]^{1/2}, \quad (25)$$

Следствие 3: Минимизация информационной избыточности дискретного представления функции времени  $s(t)$  внутри области значений  $k$  – того порядка имеет место при условии

$$\Delta \approx \delta_D - 1 = \frac{\Gamma(k=0)}{\Gamma(k)} - 1 = \frac{(1+1/L)Rk}{S} - 1. \quad (26)$$

# Области допустимых значений частоты дискретизации по теореме УКШрп



Пример расчета:  $F_H=9,5$  кГц,  $F_B=10,5$  кГц

Вариант 1:  $F_d=2,048$  кГц (близкое к степени 2)

**Правильный вариант 2:**

$$L=9,5$$

$$R/S=1, \quad k_{\max}=9, \quad \Gamma_9=2,104\dots 2,116, \quad \Gamma_0 \geq 21,04$$

$$S=1.85, \quad R=2,3, \quad k_{\max}=2, \quad \Gamma_0 > 24,2, \quad \Gamma_2=8,066\dots 8,807$$

# Информационная избыточность

В общем случае информационная избыточность ТС (ИТСи) может быть представлена в виде следующего базового определения [15: с. 234]

$$\Delta = \delta - 1 = \frac{I}{I_{Min}} - 1, \quad (5)$$

где  $\delta$  – индекс (коэффициент) избыточности по количеству фактической информации  $I$  во всех каналах обработки данных по отношению к его минимально необходимому значению  $I_{Min}$  для достижения заданного уровня функциональной эффективности (качества ТС)  $Q$ .

# Ценность информации

А.А. Харкевич:

$$Z = \log_2 \frac{P_{aps}}{P_{apr}}$$

В.И. Корогодин:

$$V = \frac{P_{aps} - P_{apr}}{1 - P_{apr}}$$

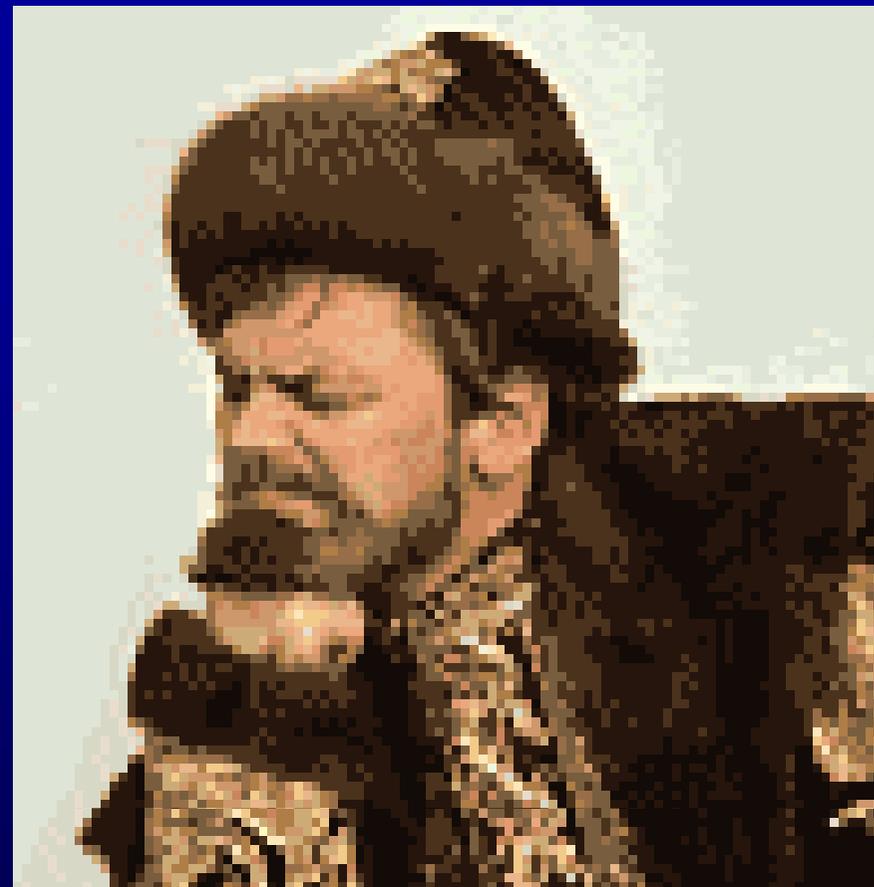
М.В. Волькенштейн:

$$Q = \frac{AIT}{B+I} e^{-CT/I}$$



Александр Александрович  
Харкевич  
1904.01.21-1965.03.30

**Спасибо Вам за внимание !**



**17151@bk.ru**

**Алексеев Анатолий Владимирович**