

Графы смежности как вторичная структура алгебраической байесовской сети: анализ и синтез

А. А. Фильченков

*м.н.с. лаб. ТуМПИ,
Санкт-Петербургский институт информатики и
автоматизации РАН*

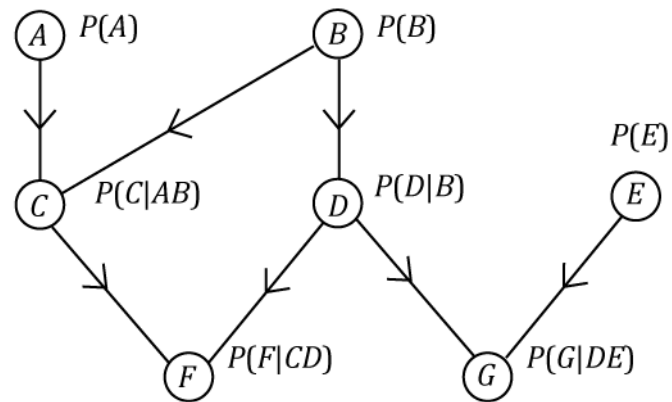
aaafil@mail.ru

Вероятностные графические модели

- Вероятностная декомпозиция
- «Локальность» (элементов, вычислений)
- Графовое представление
- Структуры зависимостей/процессы/упорядоченные данные
- Автоматическое обучение
- Близкие связи между моделями
- Применение: медицина, диагностика, распознавание текстов, речи, образов, поиск правил и зависимостей, экспертные системы и интеллектуальные системы поддержки принятия решений.

Байесовские сети доверия

- Дж. Перл (1986). Премия Тьюринга (2011).
- Направленный ациклический граф,
 - узлам приписаны утверждения либо случайные величины,
 - ребрам приписаны тензоры условных вероятностей.
- Причинно-следственная связь между узлами.
- Байесовский вывод.
- Неопределенность через меру вероятности.



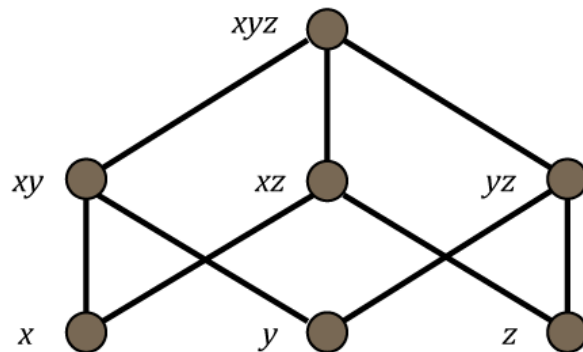
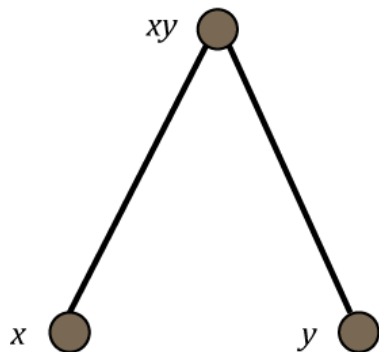
Алгебраические байесовские сети

- Городецкий, Тулупьев. Начало 90-х гг.
- Основаны на вероятностной логике в формализации Хальперна, Фаджина и Меджиддо.
- Скалярные или интервальные оценки вероятности.
- Ненаправленный граф.
- Байесовский вывод.
- Небольшие фрагменты знаний (2—3—4—5).
- Ряд нерешенных задач.

Фрагмент знаний

Фрагментом знаний (ФЗ) АБС — пара $\langle C, p \rangle$,

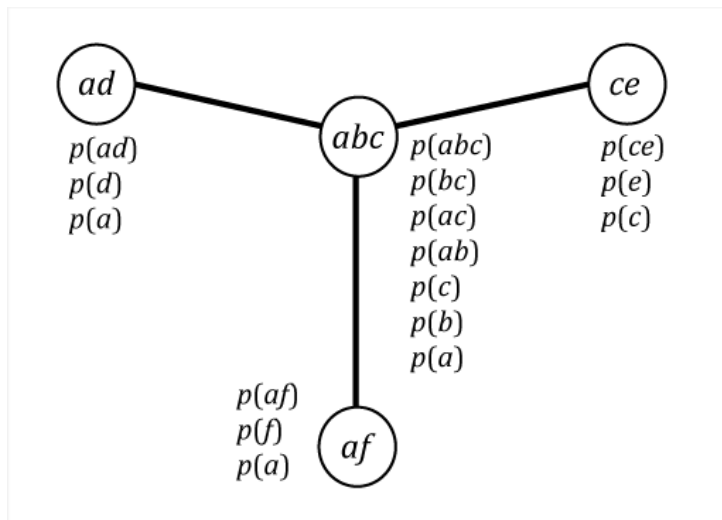
- где C — идеал конъюнктов над некоторым алфавитом A (в смысле теории ЧУМ),



- p — в общем случае некоторая функция на C , значения которой лежат
 - либо в интервале $[0;1]$ (скалярные оценки),
 - либо являются интервалами, границы которых лежат в $[0;1]$ (интервальные оценки).

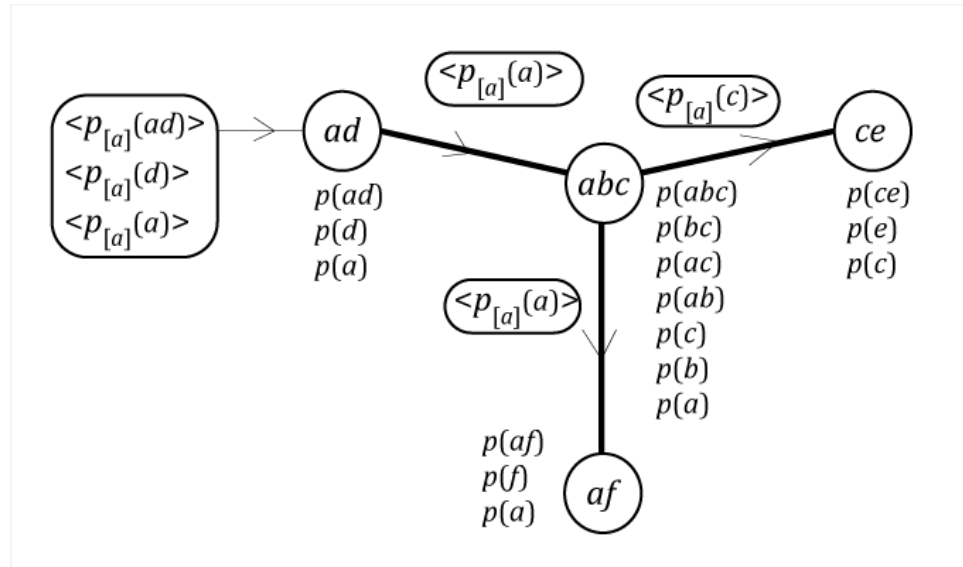
Первичная и вторичная структуры

- *Первичная структура* — набор максимальных по включению фрагментов знаний.
- *Вторичная структура* — граф, построенный над первичной структурой, обладающий определенными свойствами.



Апостериорный логико-вероятностный вывод

- Поступает свидетельство (три вида), осуществляется пропация по всей сети. От ФЗ до ФЗ передаются «виртуальные свидетельства», содержащие апостериорные оценки вероятности.



Исходная постановка задачи и подзадачи

Дана первичная структура АБС. Необходимо построить вторичную структуру так, чтобы на ней можно было осуществлять логико-вероятностный вывод.

- 1) Какой может быть вторичная структура АБС, чтобы можно было осуществлять апостериорный логико-вероятностный вывод?
- 2) Над любой ли первичной структурой АБС можно построить такую вторичную структуру?
- 3) Как выявить это по косвенным признакам?
- 4) Если над первичной структурой АБС нельзя построить вторичную структуру, то как преобразовать эту первичную структуру к той, над которой это возможно?
- 5) Как построить вторичную структуру?

План (1/5)

Дана первичная структура АБС. Необходимо построить вторичную структуру так, чтобы на ней можно было осуществлять логико-вероятностный вывод.

- 1) Какой может быть вторичная структура АБС, чтобы можно было осуществлять апостериорный логико-вероятностный вывод?
- 2) Над любой ли первичной структурой АБС можно построить такую вторичную структуру?
- 3) Как выявить это по косвенным признакам?
- 4) Если над первичной структурой АБС нельзя построить вторичную структуру, то как преобразовать эту первичную структуру к той, над которой это возможно?
- 5) Как построить вторичную структуру?

Требования к вторичной структуре

Выделено четыре условия:

- R1.** Между каждой парой непересекающихся ФЗ не должно быть ребра.
- R2.** Между каждой парой пересекающихся ФЗ должен быть путь, в котором каждый ФЗ содержит пересечение концов этого пути.
- R3.** Связность вторичной структуры.
- R4.** Ацикличность вторичной структуры.

Два дополнительных:

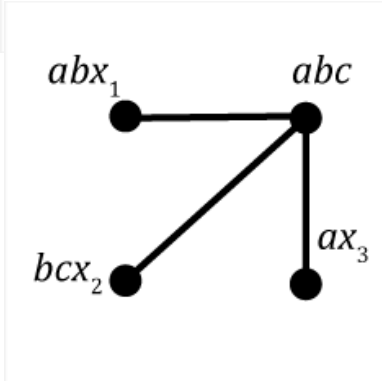
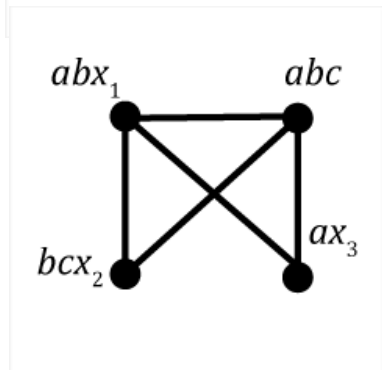
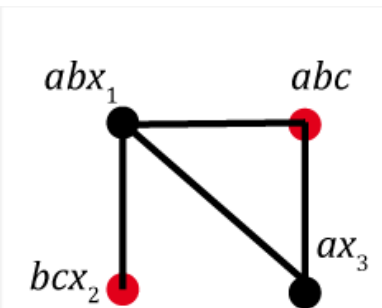
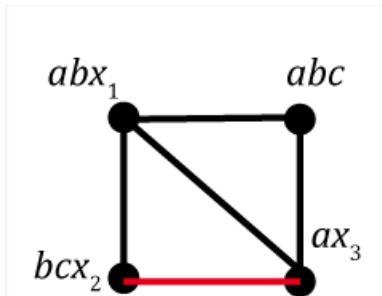
- R5*.** Минимизация времени выполнения алгоритмов глобального ЛВВ.
- R6*.** Минимизация потери точности оценок при пропагации в случае интервальных оценок.

Граф смежности

- Алфавит $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Набор МФЗ, построенный над этим алфавитом: $KP_1, KP_2, KP_3, \dots$. Рассмотрим граф над ними. Каждой вершине припишем подалфавит, над которым построен соответствующий ФЗ. Будем называть это *нагрузкой* соответствующей вершин: $A_i = W(KP_i)$.
- Пересечение нагрузок двух вершин называется их *сепаратором*:
$$Sep(KP_i, KP_j) = W(KP_i) \cap W(KP_j).$$
- Если сепаратор двух вершин непуст, то они называются *сочлененными*.
- *Граф МФЗ* — ненаправленный граф, ребра в котором возможны только между сепарированными вершинами. Удовлетворяет **R1**.
- *Магистральный путь* между двумя сочлененными вершинами графа МФЗ — это такой путь между ними, что нагрузка любой вершины на этом пути содержит сепаратор начальной и конечной вершин.
- Граф МФЗ *магистрально связан*, если каждая пара сочлененных вершин соединена в нем путем. *Граф смежности* — магистрально связный граф МФЗ. Удовлетворяет **R1** и **R2**.

Дерево смежности и минимальный графы смежности

- *Дерево смежности* — дерево, являющееся графом смежности.
- *Минимальный граф смежности* — граф смежности, число ребер которого минимально.



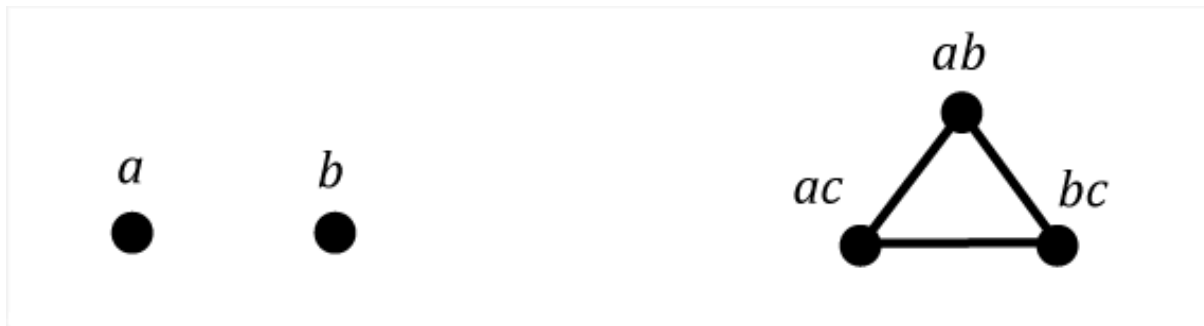
План (2/5)

Дана первичная структура АБС. Необходимо построить вторичную структуру так, чтобы на ней можно было осуществлять логико-вероятностный вывод.

- 1) Какой может быть вторичная структура АБС, чтобы можно было осуществлять апостериорный логико-вероятностный вывод?
- 2) Над любой ли первичной структурой АБС можно построить такую вторичную структуру?
- 3) Как выявить это по косвенным признакам?
- 4) Если над первичной структурой АБС нельзя построить вторичную структуру, то как преобразовать эту первичную структуру к той, над которой это возможно?
- 5) Как построить вторичную структуру?

Связные и ациклические графы смежности

- **Теорема 1.** Над произвольной первичной структурой все графы смежности связны или несвязны одновременно.
- Будем говорить о *связной* первичной структуре.
- **Теорема 2.** Над произвольной первичной структурой все минимальные графы смежности ациклически или циклически одновременно.
- Будем говорить об *ациклической* первичной структуре.



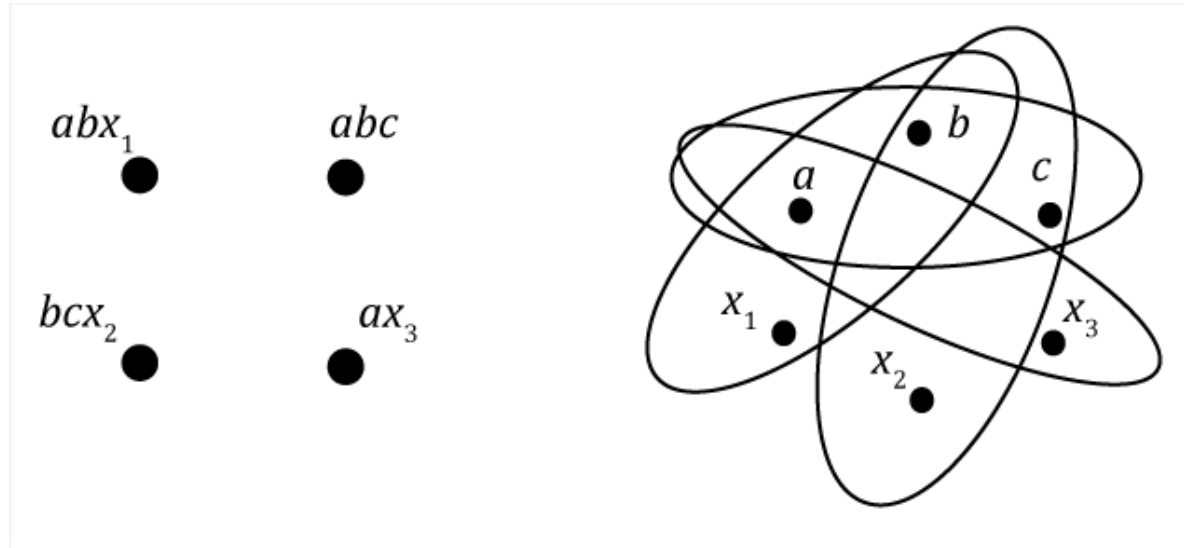
План (3/5)

Дана первичная структура АБС. Необходимо построить вторичную структуру так, чтобы на ней можно было осуществлять логико-вероятностный вывод.

- 1) Какой может быть вторичная структура АБС, чтобы можно было осуществлять апостериорный логико-вероятностный вывод?
- 2) Над любой ли первичной структурой АБС можно построить такую вторичную структуру?
- 3) **Как выявить это по косвенным признакам?**
- 4) Если над первичной структурой АБС нельзя построить вторичную структуру, то как преобразовать эту первичную структуру к той, над которой это возможно?
- 5) Как построить вторичную структуру?

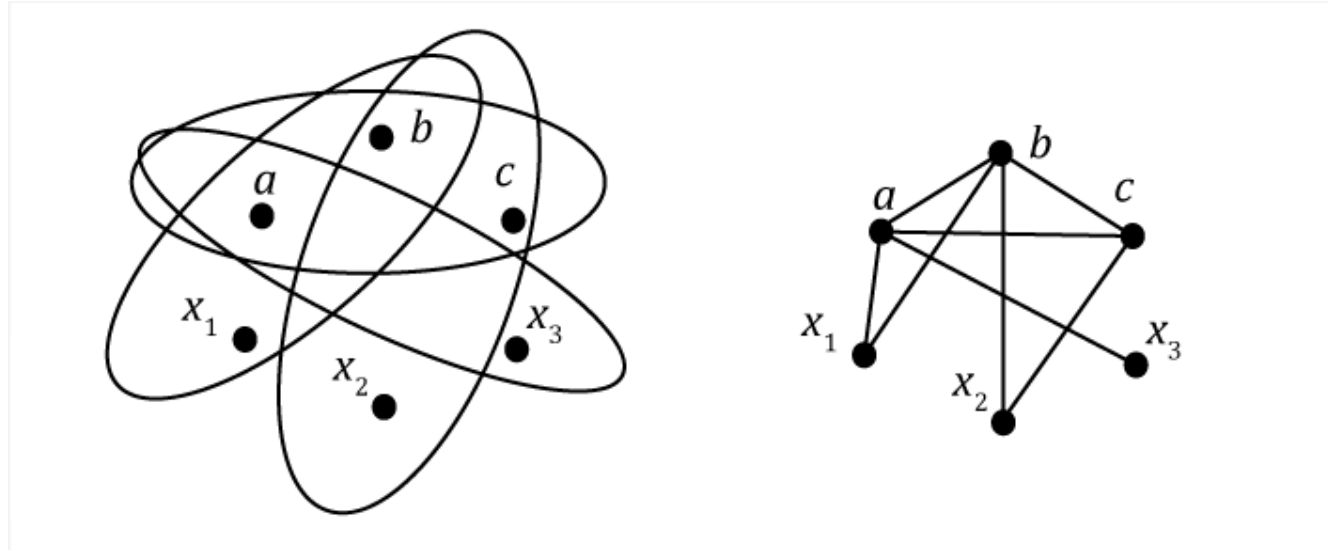
Гиперграфовое представление первичной структуры

- Пара $(A, \{W(KP_i)\})$ — гиперграф H .
- H минимален.



Протоструктура

- Протоструктура — первичный граф для H , то есть $(A, E): (v, u) \in E \Leftrightarrow \exists i: \{v, u\} \subseteq W(KP_i)$.



Критерий связности (на основе протоструктуры)

- **Теорема 3.** Первичная структура связна тогда и только тогда, когда связна протоструктура.

1-й критерий ацикличности (на основе простоструктуры)

- **Теорема 4.** Первичная структура ациклична тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:
 - 1) протоструктура хордальна (триангулярна);
 - 2) множество вершин максимальных клик в протоструктуре совпадает с набором атомов, входящих в нагрузки максимальных фрагментов знаний.

Проблема: задача поиска максимальных клик NP-полна.

2-й критерий ацикличности (на основе третичной полиструктуры)

- **Теорема 5.** Первичная структура является ациклической тогда и только тогда, когда выполняется

$$n - 1 = \sum_{U \in \text{Sep}} \text{Conn}(\downarrow U) - |\text{Sep}|,$$

где

n – число вершин в первичной структуре,

Sep – множество сепараторов,

$\text{Conn}(G)$ – число компонент связности G ,

$\downarrow U$ – сильное сужение на сепаратор U : граф, множеством вершин которого является все вершины первичной структуры, нагрузка которых содержит U и ребра проведены между каждой парой сепарированных вершин:

$$\downarrow U = \langle \{v | v \in \text{PS}, U \subset W(v)\}, \{(u, v) | \text{Sep}(u, v) \neq \emptyset\} \rangle.$$

3-й критерий ацикличности (на основе полусиблинговых циклов)

- **Теорема 6.** Первичная структура ациклична, когда не существует простых полусиблинговых небратских простых циклов, где полусиблинговый небратские циклы – особые подграфы в графах, построенных над множеством сепараторов.

2-й и 3-й критерии полиномиальны.

План (4/5)

Дана первичная структура АБС. Необходимо построить вторичную структуру так, чтобы на ней можно было осуществлять логико-вероятностный вывод.

- 1) Какой может быть вторичная структура АБС, чтобы можно было осуществлять апостериорный логико-вероятностный вывод?
- 2) Над любой ли первичной структурой АБС можно построить такую вторичную структуру?
- 3) Как выявить это по косвенным признакам?
- 4) Если над первичной структурой АБС нельзя построить вторичную структуру, то как преобразовать эту первичную структуру к той, над которой это возможно?
- 5) Как построить вторичную структуру?

Задача преобразования первичной структуры

- Дана первичная структура, над которой нельзя построить дерево смежности. Необходимо преобразовать ее к первичной структуре, вероятностная семантика которой совпадает с исходной, и над которой можно построить дерево смежности.
- Теоремы 1 и 2 говорят о том, что минимальные графы смежности связны/несвязны и цикличны/ацикличны одновременно.
- Для построения связной первичной структуры рассматриваем вершины компоненты связности произвольного минимального графа смежности как различные первичные структуры и работаем с ними отдельно.
- Проблема преобразования первичной структуры к ацикличной сложнее.

Преобразование первичной структуры к ацикличной (1/2)

- Теорема 4. Первичная структура ациклична тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:
 - 1) протоструктура хордальна (триангулярна);
 - 2) множество вершин максимальных клик в протоструктуре совпадает с набором атомов, входящих в нагрузки максимальных фрагментов знаний.
- Известен алгоритм:
 - 1) Триангулировать протоструктуру;
 - 2) В построенном графе выбрать максимальные клики;
 - 3) На соответствующих подалфавитах построить фрагменты знаний.
- Показано, что в ходе работы такого алгоритма первичная структура приводится к ацикличной.

Преобразование первичной структуры к ациклической (2/2)

- Предыдущий алгоритм NP-полный.
- Разработаны более простые алгоритмы на основе устранения простых небратских полусиблинговых циклов, они полиномиальны.
- Все подобные алгоритмы «укрупняют» фрагменты знаний первичной структуры.
- Противоречие с принципом декомпозиции.
- Возникает потребность в работе с циклическими первичными структурами.
- Общий случай вторичной структуры: минимальный граф смежности.

План (5/5)

Дана первичная структура АБС. Необходимо построить вторичную структуру так, чтобы на ней можно было осуществлять логико-вероятностный вывод.

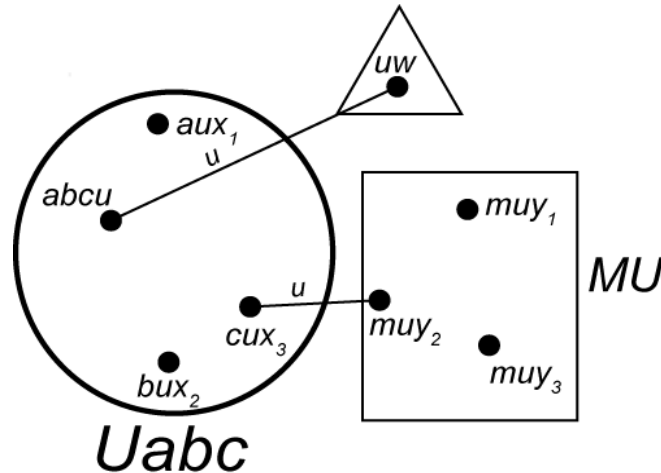
- 1) Какой может быть вторичная структура АБС, чтобы можно было осуществлять апостериорный логико-вероятностный вывод?
- 2) Над любой ли первичной структурой АБС можно построить такую вторичную структуру?
- 3) Как выявить это по косвенным признакам?
- 4) Если над первичной структурой АБС нельзя построить вторичную структуру, то как преобразовать эту первичную структуру к той, над которой это возможно?
- 5) Как построить вторичную структуру?

Матроидное представление

- Рассмотрим полный граф $G_{\max} = \langle PS, E \rangle$. E – носитель матроида, подмножество ребер E' независимо, если $G = \langle PS, E \setminus E' \rangle$ магистрально связан. I — семейство независимых подмножеств E' .
- **Теорема 7.** $M = \langle E, I \rangle$ — матроид.
- **Следствие 1.** Множество минимальных графов смежности совпадает с множеством редуцируемых графов смежности.
- **Следствие 2.** Жадный алгоритм, который удаляет ребра из максимального графа смежности, сохраняя магистральную связность, строит минимальный граф смежности.

Теорема о множестве минимальных графов смежности (1/2)

- Рассмотрим произвольный сепаратор U и сильное сужение $\downarrow U$. Рассмотрим множество ребер, число которых равно $\text{Conn}(\downarrow U) - 1$ и при добавлении к $\downarrow U$ делают получающийся граф связным.
- Граф, ребрами которого является указанное множество, а вершинам выступают концы этих ребер, называется *жилой*.



Теорема о множестве минимальных графов смежности (2/2)

- Для каждого сепаратора можно построить множество жил. Объединение жил, выбранных по одной для каждого сепаратора, называется *пучком*.
- **Теорема 7.** Множество минимальных графов смежности совпадает с множеством пучков.

Синтез множества минимальных графов смежности

- Для каждого сепаратора строится сильное сужение.
- Для каждого построенного сужения строится множество всех возможных жил.
- Перебираются все возможные кортежи таких жил, по одной для каждого сепаратора.
- Объединяя все жилы, входящие в каждый кортеж, мы будем получать минимальные графы смежности. Перебрав все такие кортежи, мы переберем все множество минимальных графов смежности.
- Если для каждого сепаратора строить только жилы, которые являются звездами, получаемое в итоге подмножество минимальных графов смежности будет содержать минимальные графы смежности с минимальным диаметром (требование R6*).
- Если для каждого сепаратора случайным образом строить жилу, то получившееся объединение жил будет случайным минимальным графом смежности.

Грантовая поддержка

- Грант РФФИ, проект № 09-01-00861-а «Методология построения интеллектуальных систем поддержки принятия решений на основе баз фрагментов знаний с вероятностной неопределенностью».
- Грант Правительства Санкт-Петербурга для победителей конкурса грантов Санкт-Петербурга для студентов, аспирантов, молодых ученых, молодых кандидатов наук 2010 г., № 2.1/03–06/018.
- Грант РФФИ, проект № 12-01-00945-а «Развитие теории алгебраических байесовских сетей и родственных им логико-вероятностных графических моделей систем знаний с неопределенностью».
- Грант РФФИ, проект 12-01-31202 мол_а «Развитие теории графов смежности для автоматического обучения баз знаний с неопределенностью на основе алгебраических байесовских сетей».

Графы смежности как вторичная структура алгебраической байесовской сети: анализ и синтез

А. А. Фильченков

*м.н.с. лаб. ТуМПИ,
Санкт-Петербургский институт информатики и
автоматизации РАН*

aaafil@mail.ru