Типология последовательностей Фибоначчи: теория и практика. (Введение в математику гармонии)

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

[1]Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ), [2]Санкт-Петербургский государственный университет

Презентация книги, 24 февраля, 2012, СПИИ РАН, Санкт-Петербург

Издательство:

LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken, Germany,
ISBN: 978-3-8473-1912-2

Три цели книги

1. Ознакомить читателя с основными свойствами последовательностей Фибоначчи и математическими структурами, на основе которых строится теоретический базис этих последовательностей.
2. Построить системную типологию последовательностей Фибоначчи, претендующую на их исчерпывающее описание.
3. Продемонстрировать эффективность типологических изысканий на примерах из разных областей человеческой деятельности.

Глава 1. Необходимые математические сведения

- Уравнения второй третьей и четвертой степени.
- Квадратичные иррациональности и непрерывные дроби.
- Возвратные последовательности.
- Пропорции и прогрессии.
- Повторные радикалы.
- Ранговые распределения.
- Ядро и периферия статусных распределений.

Глава 2. Типология последовательностей Фибоначчи

- Классические последовательности Фибоначчи.
- Симметрийные свойства многочленов Фибоначчи.
- Пространственная типология фиботипов.
- Ранговые распределения фиботипов.
- Последовательности Шпинадель—Газале.
- Рекурсии второго порядка общего вида.

Глава 2 (продолжение)

- Гармонические последовательности Владимирова.
- Рекурсии высших порядков.
- Пифагоровы последовательности.

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Глава 3. Типология пропорций и средних

- Средние и теория пропорций.
- Ранговые средние и тетрады Фибоначчи.
- Скользящие средние.
- Скользящие суммы.
- Скользящие частные.

Глава 4. Прикладные задачи теории фиботипов

- Эйдос золотой пропорции.
- Техника сонета и сонеты техники.
- Гармония ценозов.
- Национальные футбольные чемпионаты.
- Принцип золотого сечения в задачах поиска.
- Гармония электрических цепей.

Глава 4 (продолжение)

Глава 1. Необходимые математические сведения

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Квадратичные иррациональности и непрерывные дроби

Определение квадратичной иррациональности

Definition

Алгебраическое иррациональное число второй степени называется квадратичной иррациональностью.

Если $ax^2 + bx + c = 0$ — уравнение с целыми коэффициентами, причем $a \neq 0$, то его корни

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

— квадратичные иррациональности при соблюдения двух условий:

- $D = b^2 - 4ac > 0$;
- D не является точным квадратом.

Example

Число $1+\sqrt{2}$ есть квадратичная иррациональность. Квадратное уравнение, порождающее эту иррациональность, имеет вид

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Положительный корень $1+\sqrt{2}$ данного уравнения — это т. н. *серебряное сечение* де Шпинадель, одно из металлических сечений, к числу которых принадлежит и *золотое сечение*.

Непрерывные дроби

Definition

Выражение

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}},$$

где $\{a_k\}$ — натуральные числа, называется *непрерывной дробью*. Числа $\{a_k\}$ называются *элементами* непрерывной дроби.

Example

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}} = [1; 2, 2, 2, \ldots].$$

Оборвем непрерывную дробь $a = [a_0; a_1, a_2, ...,]$ на k-ом шаге, удержав элементы $a_0, a_1, ..., a_k$ и отбросив все последующие элементы a_{k+1}, a_{k+2} и т. д.

Definition

Число

$$f_k = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k] = \frac{N_k}{D_k}$$

называется k-й *подходящей дробью*, а числа N_k и D_k — соответственно k-ым *числителем* и k-ым*знаменателем*.

Имеет место *тождество Гюйгенса*

$$N_{k-1}D_k - N_k D_{k-1} = (-1)^k,$$

при этом k-ые числитель и знаменатель подходящей дроби $f_n = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ при начальных условиях

$$N_{-1} = 1, \quad N_0 = a_0, \quad D_{-1} = 0, \quad D_0 = 1,$$

удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$N_k = a_k N_{k-1} + N_{k-2}, \quad D_k = a_k D_{k-1} + D_{k-2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Example

Подходящие дроби квадратичной иррациональности

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618$$

имеют вид

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \frac{1}{2}, \quad f_3 = \frac{2}{3}, \quad f_4 = \frac{3}{5}$$

и т. д. Таким образом, $f_n = F_{n-1}/F_n$, где $\{F_n\}$ — *последовательность чисел Фибоначчи*, имеющая вид

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad n \geq 1.$$

Отсюда согласно тождеству Гюйгенса вытекает

Definition

Тождество Кассини

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad n \geq 1, \tag{1}$$

связывающее три последовательных числа Фибоначчи.

Theorem

(Григорьев—Мартыненко) Имеет место утверждение: для любых k и n справедливо тождество

$$F_{k+j}F_{k+(n-j)} - F_kF_{k+n} = (-1)^k F_jF_{n-j}, \quad j < n. \tag{2}$$

Тождество Кассини (1) является частным случаем тождества (2), которое будем называть *обобщенным тождеством Кассини*.

Пример: обобщенное тождество Кассини.

Example

Положим $n = 6$, $j = 4$, $k = 2$. Согласно (2) приходим к равенству

$$F_6 F_4 - F_2 F_8 = (-1)^2 F_4 F_2, \tag{3}$$

которое справедливо, так как

$$F_2 = 1, \quad F_4 = 3, \quad F_6 = 8, \quad F_8 = 21.$$

Согласно (3) произведения в левой части тождества образуют симметрийную структуру, в которой F_2 и F_8 — обрамляющие, а F_6 и F_4 — центральные члены, при этом правая часть тождества представляет собой произведение двух первых членов четверки.

Definition

Семейством металлических сечений называется множество положительных собственных значений матрицы $A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где p и q — различные натуральные числа.

Другими словами, металлические сечения — это положительные корни квадратного уравнения

$$x^2 - px - q = 0.$$

Будем обозначать эти корни как

$$\sigma_p^q = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Таблица: Металлические сечения σ_p^q.

p	q: 1	2	3	4	5
1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ [1]=1.618	2 [2; (0)]	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ [2; (3)]	$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ [2; (1,1,3)]	$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ [2; (1,3)]
2	$1+\sqrt{2}$ [2]=2.414	$1+\sqrt{3}$ [2; (2,1)]	3 [3; (0)]	$1+\sqrt{5}$ [3; (4)]	$1+\sqrt{6}$ [3; (2,4)]
3	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ [3]=3.303	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ [3; (3,1,1)]	$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ [3; (3,1)]	4 [4; (0)]	$\frac{3+\sqrt{29}}{2}$ [4; (5)]
4	$2+\sqrt{5}$ [4]=4.236	$2+\sqrt{6}$ [4; (4,2)]	$2+\sqrt{7}$ [4; (4,1,1,1)]	$2+2\sqrt{2}$ [4; (4, 1)]	5 [5; (0)]
5	$\frac{5+\sqrt{29}}{2}$ [5]=5.193	$\frac{5+\sqrt{33}}{2}$ [5; (5,2,1,2)]	$\frac{5+\sqrt{37}}{2}$ [5; (5,1,1)]	$\frac{5+\sqrt{41}}{2}$ [5; (5,1,2,2,1)]	$\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$ [5; (5,1)]

Золотое, серебряное и бронзовое сечения

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Первый столбец ($q = 1$) таблицы σ_p^q представлен непрерывными дробями вида $[p] := [p; (p)]$.

Definition

Три элемента первого столбца σ_p^1

$$\begin{aligned} \Phi &:= \sigma_1^1 = 1.618, \\ \sigma_{Ag} &:= \sigma_2^1 = 1 + \sqrt{2} = 2.414, \quad \sigma_{Br} := \sigma_3^1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3.303 \end{aligned}$$

называются *золотым*, *серебряным* и *бронзовым* сечениями соответственно.

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Definition

Элементы первой строки табл. 1

$$\sigma_{Co} := \sigma_1^2 = 2, \quad \sigma_{Ni} := \sigma_1^3 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} = 2.303$$

принято называть *медным* и *никелевым* сечениями соответственно.

Золотое сечение Φ получаем в виде непрерывной дроби, если:

- в уравнении $x^2 - px - q = 0$ положить $p = 1$, $q = 1$;
- записать полученное уравнение в виде $x^2 = x + 1$, т. е. $x = 1 + \frac{1}{x}$;
- итерационно подставлять значение x во второе слагаемое.

В результате получаем

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}} = [1; (1)] = [1].$$

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Example

Континуантом называется определитель трехдиагональной матрицы Якоби вида

$$u_n = (a_1 a_2 ... a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

Отсюда при $a_n = 1,\ n = 1, 2, \dots$ получаем *ряд Фибоначчи*

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Пример: золотое сечение как отношение континуантов (продолжение)

Example

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n} = \varphi = 0.618, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \Phi = 1.618.$$

Следовательно,

$$\varphi = \Phi^{-1}.$$

Возвратные последовательности

Definition

Уравнение

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \ldots + a_n y_k = 0, \tag{4}$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — заданные вещественные числа, причем $a_n \neq 0$, называется линейным однородным разностным стационарным уравнением порядка n. Последовательности $\{y_k\}$, удовлетворяющие (4), называются *возвратными*, или *рекуррентными*, порядка n.

Definition

Характеристическим уравнением последовательности (4) называется уравнение

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0. \qquad (5)$$

Если все корни $x_1, ..., x_n$ уравнения (5)— вещественные и различные, то общий член последовательности (4) имеет вид

$$y_k = C_1 x_1^k + ... + C_n x_n^k,$$

где константы C_k определяются из начальных условий $y_1 = c_1, y_2 = c_2, ..., y_n = c_n$.

Example

Пусть

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \tag{6}$$

— последовательность Фибоначчи. Тогда

$$x_1 = \Phi, \quad x_2 = -\Phi^{-1} = -\varphi$$

— корни характеристического уравнения и

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^k - \frac{1}{\sqrt{5}}(-\Phi^{-1})^k. \tag{7}$$

— общий член последовательности (6). Формула (7) называется *формулой Бине*.

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Пусть

$$y_{k+2} = y_{k+1} + y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

— рекурсия 2-го порядка с произвольными начальными членами y_0, y_1 $(y_0^2 + y_1^2 \neq 0)$. Имеет место (обобщенная) *формуле Бине*

$$y_k = \frac{y_0\Phi^{-1} + y_1}{\sqrt{5}}\Phi^k + \frac{y_0\Phi - y_1}{\sqrt{5}}(-\Phi^{-1})^k.$$

Definition

- Рекурсия
$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}, \quad k \geq 2,$$
называется *фиботипом* $\Phi_{y_0+y_1}$.
- Фиботип Φ_{0+1} называется рядом Фибоначчи, а его члены — *числами Фибоначчи* $F_n \in \Phi_{0+1}$.
- Фиботип Φ_{2+1} называется рядом Люка, а его члены — *числами Люка* $L_n \in \Phi_{2+1}$.
- Фиботипы Φ_{0+1} и Φ_{2+1} называются *классическими*.

Таблица: Ряды Фибоначчи $\{F_k;\; F_0 = 0, F_1 = 1\}$ и Люка $\{L_k;\; L_0 = 2, L_1 = 1\}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_k	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
L_k	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F_{k+1}}{F_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{L_{k+1}}{L_k} = \Phi.$$

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Пропорции и прогрессии

Определение пропорции

Definition

Равенство двух отношений, устанавливающее зависимость между тремя величинами, называется *непрерывной* пропорцией.

В дошедших до нас работах греческих ученых встречаются, в общей сложности, 11 пропорций (классификации Никомаха и Паппа,

Example

Пропорции 1—3, представленные в таблице

	Название	Вид
1	Арифметическая	$(a-b)/(b-c)=a/a$
2	Геометрическая	$(a-b)/(b-c)=a/b$
3	Гармоническая	$(a-b)/(b-c)=a/c$
4	Антигармоническая	$(a-b)/(b-c)=c/a$

принято называть *классическими*. Пропорция 4 называется *анитигармонической*. В Древней Греции были известны 11 пропорций, включая 4 названных.

Свойство геометрической пропорции.

Если в геометрической пропорции $(a-b)/(b-c) = a/b$ положить $c = a+b$ при $a > 0$, $b > 0$, то:

- центральный член геометрической пропорции представляется в виде

$$b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a = \Phi a;$$

- последовательность чисел a, b и c принимает вид a, $a\Phi$, $a + a\Phi$ или, что эквивалентно,

$$a = 1, \quad b = \Phi, \quad c = \Phi^2.$$

Классификация Джини

Из общего числа 324 возможных пропорций следует исключить пропорции:

- эквивалентные,
- приводящие к противоречию,
- не отвечающие условию, что все три числа a, b и c должны быть различны.

Среди оставшихся пропорций теоретический интерес представляет 31 пропорция. Согласно (Джини, 1970), эти пропорции могут быть разбиты на два класса по 16 и 15 пропорций в каждом. Первые 16 из них будем называть *пропорциями Джини*.

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Таблица: Пропорции Джини.

Левая часть	Правая часть пропорции						
	a/a	a/b	a/c	b/a	b/c	c/a	c/b
$\dfrac{a-b}{b-c}$	1	2	3	4		5	6
$\dfrac{a-b}{a-c}$		7	8	9		10	11
$\dfrac{a-c}{b-c}$			12	13	14	15	16

Классификация непрерывных пропорций (продолжение)

Таблица: Классификация Джини-Никомаха-Паппа.

Джини Никомах-Папп	1 (НП-1)	2 (НП-2)	3 (НП-3)	4 (НП-6)
Джини Никомах-Папп	5 (НП-4)	6 (НП-5)	7	8
Джини Никомах-Папп	9 (П-8)	10 (Н-8), (П-9)	11 (Н-10), (П-7)	12 (Н-7)
Джини Никомах-Папп	13	14 (Н-9), (П-10)	15	16

Центральный и крайние члены пропорции.

Definition

- Число b называется *центральным членом* пропорции;
- числа a и c называются *крайними членами* пропорции;
- если центральный член b, будучи выражен через крайние члены a и c, находится между ними, он называется *средним значением* крайних членов.

Свойство A. Классические и антигармоническая пропорции обладают тем свойством, что:

- центральный член b этих пропорций всегда является средним, т. е. расположен между крайними членами a и c;
- центральный член b принимает значения, представленные в таблице:

	Арифметич.	Геометрич.	Гармонич.	Антигармонич.
b	$\dfrac{a+c}{2}$	$\sqrt{ac}$	$\dfrac{2ac}{a+c}$	$\dfrac{a^2+c^2}{a+c}$

Definition

Две пропорции называются *сопряженными*, если при перемене крайних членов a и c они преобразуются одна в другую.

Свойство *B*. Пропорции Джини разбиваются на пары сопряженных пропорций, а именно: они образуют

- четыре пары самосопряженных пропорций

$$(1,1),\quad (2,2),\quad (3,3),\quad (5,5),$$

т. е. классические и антигармоническая пропорции сопряжены сами себе;

- шесть пар сопряженных пропорций

$$(4,6),\quad (7,14),\quad (8,12),\quad (9,16),\quad (10,15),\quad (11,13).$$

- ***Свойство*** C. В пропорциях 4, 6-16 существуют такие соотношения между крайними членами (знаки a и c, отношения $a > c$ или $a < c$, $|a| > |c|$ или $|a| < |c|$), при которых центральный член (или одно из двух его возможных значений) не является средним или даже вообще не является вещественным.
- ***Свойство*** D. Только в арифметической пропорции при всех вариантах знаков крайних членов и соотношениях их величин центральный член b является средней величиной. Свойством **D** объясняется широкое применение среднего арифметического в статистической практике.

Термин «прогрессия» в математике не имеет точного определения.

Definition

(Джини). *Прогрессией* называется монотонная последовательность $\{x_n\}$, для всякой тройки $\langle x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\rangle$ элементов которой центральный элемент x_{n+1} является *средним* крайних элементов x_n и x_{n+2}. Если

$$\forall n \geq 0 : \quad x_{n+1} > x_n \quad (x_{n+1} < x_n),$$

то прогрессия $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*).

Пусть $\{x_n\}$ — прогрессия.

Definition

Конечный предел

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

если он существует, называется *знаменателем* прогрессии.

- Если $q > 1$, то прогрессия возрастающая;
- Если $q < 1$, то прогрессия возрастающая;
- В случае $q = 1$ прогрессия может быть как возрастающей, так и убывающей.

Example

Пусть $\{x_n = \frac{1}{n}, n \geq 1\}$ — убывающая последовательность. Обозначим

$$a = \frac{1}{n}, \quad b = \frac{1}{n+1}, \quad c = \frac{1}{n+2}.$$

Тогда

$$b = \frac{2ac}{a+c} = \frac{1}{n+1}$$

— гармоническое среднее крайних элементов a и b, т. е. $\{x_n\}$ — *убывающая гармоническая прогрессия*, или *гармонический ряд*, со знаменателем

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} = 1.$$

Глава 2. Типология последовательностей Фибоначчи

Симметрийные свойства многочленов Фибоначчи

Definition

Многочлены

$$f(x) \in \Omega = \{F_j x^{i+1} - F_{i+1} x^j + (-1)^j F_{i+1-j}, \quad i \geq j \geq 1\}, \quad (9)$$

называются *золотыми*. Многочлен $d(x) = x^2 - x - 1$ называется *многочленом Фибоначчи*. Многочлен Фибоначчи $d(x)$ является золотым.

Theorem

Многочлен Фибоначчи $d(x)$ является наибольшим общим делителем (НОД) золотых многочленов (9), т. е. все золотые многочлены $f \in \Omega$ имеют два общих корня с уравнением Фибоначчи $d(x) = 0$, а именно: $x_1 = \Phi$ и $x_2 = -\Phi^{-1}$.

Definition

Матрица

$$Q_{ij} = \begin{cases} F_{j+1-i} & \text{если } i \le j, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{10}$$

называется *матрицей Фибоначчи—Стахова*. Матрицей Фибоначчи—Стахова будем называть также матрицу 2-го порядка

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Матрицы (10) и (11) являются различными матричными обобщениями чисел Фибоначчи.

Свойства матрицы Фибоначчи—Стахова $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$..

Theorem

Имеют место следующие утверждения:

1. $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$
2. $trQ^n = L_n.$
3. $|Q^n| = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ — *тождество Кассини.*
4. $\lambda_1 = \Phi^n, \lambda_2 = (-\Phi)^{-n}$ — *собственные числа матрицы* Q^n.

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Пространственная типология Фиботипов

Затравочные числа фиботипов.

Definition

Числа $y_0 \geq 0$, $y_1 \geq 0$ называются *затравочными* для последовательности Фибоначчи

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \quad y_0 = \alpha, \quad y_1 = \beta, \tag{12}$$

если выполнены условия:

- α, β *взаимно просты*, т. е. НОД$(\alpha, \beta) = 1$;
- $\alpha > \beta$.

Исключением является классическая последовательность Фибоначчи — фиботип Φ_{0+1}, для которого $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Theorem

Пусть $\alpha, \beta \in R^1$ — произвольные вещественные числа. Имеют место следующие утверждения:

1. *Множество рекурсий $\Phi_{\alpha+\beta}$ образует линейное пространство размерности два.*
2. *Фиботипы Фибоначчи $e_1 = \Phi_{0+1}$ и Люка $e_2 = \Phi_{2+1}$ линейно независимы.*
3. $\Phi_{\alpha+\beta} = \left(\beta - \frac{1}{2}\alpha\right)\Phi_{0+1} + \frac{1}{2}\alpha\Phi_{2+1}$.
4. *Если $\alpha/2, \beta \in \mathbb{Z}$, то существуют затравочные значения y_0, y_1 такие, что $\{\Phi_{y_0+y_1}\} = \{\Phi_{\alpha+\beta}\}$, т. е.*

$$\Phi_{y_0+y_1} = \left(y_1 - \frac{1}{2}y_0\right)\Phi_{0+1} + \frac{1}{2}y_0\Phi_{2+1}.$$

Пример: линейные комбинации фиботипов.

Example

Пусть $y_0 = 4$, $y_1 = 1$. Тогда

$$y_1 - \frac{1}{2}y_0 = -1, \quad \frac{1}{2}y_0 = 2.$$

Следовательно,

$$\Phi_{4+1} = -\Phi_{0+1} + 2\Phi_{2+1},$$

т. е. если $y_r \in \Phi_{4+1}$, то

$$y_r = -F_r + 2L_r, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Theorem

Если $\Phi_{y_0+y_1}$ — произвольный фиботип, то он F-представим, т. е. его элементы $y_r \in \Phi_{y_0+y_1}$ можно представить в виде линейной комбинации элементов $F_r \in \Phi_{0+1}$, а именно:

$$y_k = y_0 F_{k-1} + y_1 F_k, \quad k \geq 1.$$

Зададимся вопросами:

- Каково разнообразие фиботипов Φ_{a+b} с элементами

$$y_r = aF_{r-1} + bF_r \in \Phi_{a+b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}?$$

- Возможна ли и на каких принципах квантитативная типология фиботипов Φ_{a+b}?
- Каково соотношение фиботипов Φ_{0+1} и Φ_{2+1} и остальных фиботипов в пространстве фиботипов Φ_{a+b}?

Продолжение фиботипов Φ_{a+b} в область отрицательных значений.

Theorem

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Имеют место следующие утверждения:

1. *Фиботипы Φ_{a+b} могут быть продолжены в область отрицательных значений y_r.*
2. *В частности, элементы $F_{-r} \in \Phi_{0+1}$, $L_{-r} \in \Phi_{2+1}$ фиботипов Фибоначчи и Люка в отрицательной области удовлетворяют равенствам*

$$F_{-r} = (-1)^{r+1} F_r, \quad L_{-r} = (-1)^r L_r, \quad r > 0,$$

т. е. в отрицательной области ряды Фибоначчи и Люка является знакочередующимися.

Remark

Утверждение 1 будет обсуждаться далее на конкретных примерах неклассических фиботипов.

Таблица: Центробежные кратные ряды Фибоначчи

b	a									
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-5	-5Φ					-5Φ				
-4		-4Φ				-4Φ				-4Φ
-3			-3Φ			-3Φ			-3Φ	
-2				-2Φ		-2Φ		-2Φ		
-1					-1Φ	-1Φ	-1Φ			
0	-5	-4Φ	-3Φ	-2Φ	-1Φ		1Φ	2Φ	3Φ	4Φ
1					1Φ	1Φ	1Φ			
2				2Φ		2Φ		2Φ		
3			3Φ			3Φ			3Φ	
4		4Φ				4Φ				4Φ
5	5Φ					5Φ				

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Таблица: Однократные ряды Фибоначчи и Люка

b \ a	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5			Ф								
-4			Л								
-3				Ф	Л					Л	Ф
-2					Ф		Л		Ф		
-1				Л	Ф	Ф	Ф	Ф	Л		
0					Ф		Ф				
1			Л	Ф	Ф	Ф	Ф	Л			
2			Ф		Л		Ф				
3	Ф	Л					Л	Ф			
4									Л		
5									Ф		

Визуализация фиботипов: свастики.

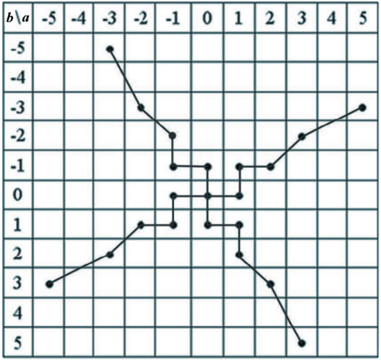

Рис.: Свастика Фибоначчи.

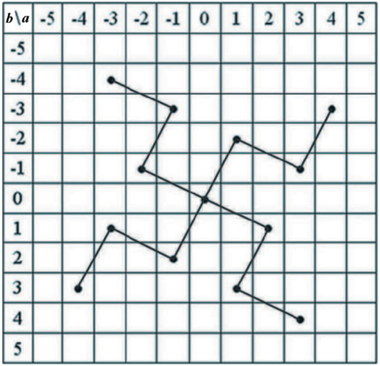

Рис.: Свастика Люка.

Визуализация фиботипов: квадраты и спирали.

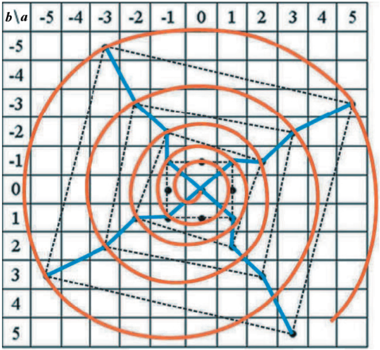

Рис.: Квадраты, свастика и спираль для однократных последовательностей Фибоначчи.

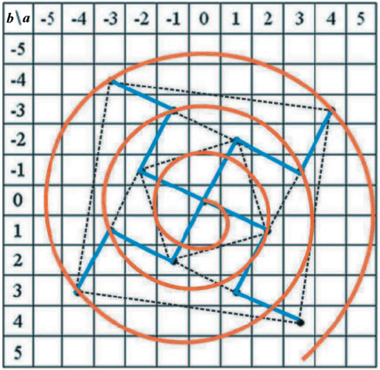

Рис.: Квадраты, свастика и спираль для однократных последовательностей Люка.

Визуализация фиботипов: ковер и клотоида Фибоначчи.

b\a	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5		3	Ф	4	5		10	9	8	7	
-4	10		Л		3		6		5		4
-3	9	6		Ф	Л		4	3		Л	Ф
-2	8		4		Ф		Л		Ф		3
-1	7	5	3	Л	Ф	Ф	Ф	Ф	Л	4	6
0					Ф		Ф				
1	6	4	Л	Ф	Ф	Ф	Ф	Л	3	5	7
2	3		Ф		Л		Ф		4		8
3	Ф	Л		3	4		Л	Ф		6	9
4	4		5		6		3		Л		10
5		7	8	9	10		5	4	Ф	3	

Рис.: Ковер Фибоначчи.

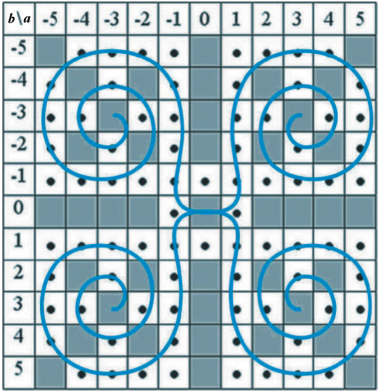

Рис.: Клотоиды Фибоначчи.

Визуализация фиботипов: свастики рядов Фибоначчи и пространствeная система фиботипов.

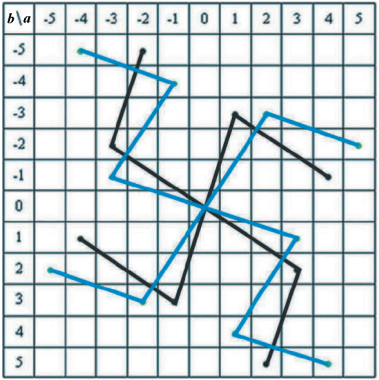

Рис.: Свастики рядов Фибоначчи Ф – 3 и Ф – 4.

b\a	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-10					2Ф	5Ф										5Л					
9					3Ф			3Л													
-8					2Л	Ф	4Ф								4Л						
-7							Л														
-6							2Ф	3Ф	2Л					3Л					2Л	3Ф	2Ф
-5	5Л							Ф											Ф		5Ф
-4			4Л					Л	2Ф				2Л				2Ф	Л	4Ф		
-3					3Л				Ф	Л					Л	Ф	3Ф			3Л	
-2							2Л			Ф		Л		Ф	2Ф		2Л				
-1									Л	Ф	Ф	Ф	Ф	Л							
0										Ф		Ф									
1								Л	Ф	Ф	Ф	Ф	Л								
2					2Л		2Ф	Ф		Л		Ф			2Л						
3		3Л			3Ф	Ф	Л					Л	Ф				3Л				
4			4Ф	Л	2Ф				2Л				2Ф	Л	4Ф				4Л		
5	5Ф		Ф											Ф							5Л
6	2Ф	3Ф	2Л					3Л					2Л	3Ф	2Ф						
7															Л						
8							4Л								4Ф	Ф	2Л				
9														3Л			3Ф				
10						5Л										5Ф	2Ф				

Рис.: Пространственная система последовательностей типа Фибоначчи.

Ранговые распределения фиботипов

В предыдущем разделе внимание было сосредоточено на фиботипах Φ_{0+1} и Φ_{2+1}, и без внимания остались другие фиботипы. Поэтому возникает вопрос:

- как и какие именно фиботипы распределены в системе координат Oab?

Ответ на этот и другие вопросы можно получить с помощью *ранговых распределений*, построенных на материале совокупностей, элементы которых являются фиботипами, выявленными в исследованном материале.

Definition

Для фиботипов далее используем обозначение ф/т, для числа реализаций фиботипов — термин *фибоупотребление* и обозначение ф/у.

Пусть:

- $\mathbb{P}$ — мера, заданная на конечном множестве объектов $x_1, x_2, \ldots x_n$, n — объем выборки;
- $V = \{v\} = \{1, 2, \ldots, K\}$ — словарь, $n \geq K$;
- $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$ — вероятности словоупотреблений, образующих текст: если x_i — значение дискретной с. в. X, то $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$;
- $f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq f_K$ — частоты вхождений слов $v \in V$, имеющих ранг k, в выборку $x_1, \ldots, x_n$, т. е. $\sum_{k=1}^{K} f_k = n$.

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Definition

- *Ранговым распределением*, соответствующим вероятностной мере $\mathbb{P}$, называется дискретное распределение P на прямой, сосредоточенное в точках натурального ряда и приписывающее каждому числу $i \in \mathbb{N}$ вес p_i.
- *Эмпирическое* ранговое распределение P_n записывают также в виде

$$P_n = (f_k, n_k)_{k=1}^{L}, \quad \sum_{k=1}^{L} n_k = n, \tag{13}$$

где n_k — объем группы слов, встретившихся с частотой f_k, L — количество *уровней* (групп слов).

Пример: ранговое распределение (исходные данные)

Example

Пусть

- $K = 10$ — объем словаря, $n = 150$ — объем выборки;
- эмпирическое ранговое распределение P_{150} представлено в табл. 7;
- сгрупированное по словам с повторяющимися частотами распределение P_{150} представлено в табл. 8.

Таблица: Ранговое распределение P_{150}. Исходные данные: $K = 10$, $n = 150$, i — ранг, f_i — частота.

	Ранги и частоты										Суммы
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum_{i=1}^{10} i = 55$
f_i	21	21	21	19	19	19	15	13	1	1	$\sum_{i=1}^{10} f_i = 150$

Пример (продолжение): сгруппированное эмпирическое ранговое распределение.

Таблица: Сгруппированное распределение P_{150}: $n = 150$ — количество слов (рангов), $L = 5$ — число групп, k — номер группы, i — ранг, f_k — частота, n_k — число повторений, $\sum_{k=1}^{L} n_k f_k = n$.

Характеристика	Группы				
k	1	2	3	4	5
i	1-3	4-6	7	8	9-10
n_k	3	3	1	1	2
f_k	21	19	15	13	1
(f_k, n_k)	(21, 3)	(19, 3)	(15, 1)	(13, 1)	(1, 2)

Характеристический коэффициент.

Чтобы с единых позиций охватить все многообразие фиботипов, введем следующее

Definition

Пусть $y_k \in \Phi_{y_0+y_1}$, $L_k \in \Phi_{2+1}$. Величина

$$\chi = \lim_{k\to\infty} \frac{y_k}{L_k} = (y_0 - y_1) - (y_0 - 2y_1)\frac{\Phi}{\sqrt{5}}$$

называется *характеристическим коэффициентом* фиботипа $\Phi_{y_0+y_1}$. Далее полагаем

$$a := y_0 - y_1, \quad b := 2y_1 - y_0.$$

Тогда

$$\chi = a + b\frac{\Phi}{\sqrt{5}}.$$

Ранговое распределение фиботипов, $a, b \in [-10, 10]$ (начало).

Таблица: Ранговое распределение фиботипов, $a, b \in [-10, 10]$, ф/у (ч) — частота, ф/у (к) — кумулятивное распределение.

№	Ранг	Ф/т y_0	Ф/т y_1	$\chi(a,b) = a + b\frac{\Phi}{\sqrt{5}}$ (a, b)	Дробь		Ф/у (ч)	Ф/у (к)
1	1	0	1	(-1, 2)	[0; 2, (4)]	0.447	124	124
2	2	2	1	(1, 0)	[1; (0)]	1.000	44	168
3	3-4	3	1	(2, -1)	[1; 3, (1)]	1.276	28	224
4		3	2	(1, 1)	[1; 1, 2 (1)]	1.724		
5	5-6	4	1	(3, -2)	[1; 1, 1, (4)]	1.553	18	260
6		4	3	(1, 2)	[2; 2, (4)]	2.447		
7	7-10	5	1	(4, -3)	[1; 1, 4, (1,5)]	1.829	14	316
8		5	2	(3, -1)	[2; 3, (1)]	2.276		
9		5	3	(2, 1)	[2; 1, 2, (1)]	2.724		

Ранговое распределение фиботипов, $a, b \in [-10, 10]$ (продолжение 1).

Таблица: Ранговое распределение фиботипов, $a, b \in [-10, 10]$, ф/у (ч) — частота, ф/у (к) — кумулятивное распределение.

№	Ранг	Ф/т y_0	Ф/т y_1	$\chi(a,b) = a + b\frac{\Phi}{\sqrt{5}}$ (a, b)	Дробь		Ф/у (ч)	Ф/у (к)
10	11-16	5	4	(1, 3)	[3; (5,1)]	3.171	8	364
11		6	1	(5, -4)	[2; 9,(2,8)]	2.106		
12		6	5	(2, 4)	[4; 1, (8, 2)]	4.894		
13		7	1	(6, -5)	[2; 2, (1)]	2.382		
14		7	6	(1, 5)	[4; (1)]	4.618		
15		8	1	(7, -6)	[2; 1, 1, (1, 12, 1, 2, 2, 2)]	2.658		
16		8	7	(1 , 6)	[5; (2,1, 12, 1, 2, 2)]	5.342		

Ранговое распределение фиботипов, $a, b \in [-10, 10]$ (продолжение 2).

Таблица: Ранговое распределение фиботипов, $a, b \in [-10, 10]$, ф/у (ч) — частота, ф/у (к) — кумулятивное распределение.

№	Ранг	Ф/т		$\chi(a,b) = a + b\frac{\Phi}{\sqrt{5}}$			Ф/у (ч)	Ф/у (к)
		y_0	y_1	(a, b)	Дробь			
17	17-22	7	2	(5, -3)	[2; 1,4, (1, 5)]	2.829	6	400
18		7	3	(4, -1)	[3; 3, (1)]	3.276		
19		7	4	(3, 1)	[3; 1,2, (1)]	3.724		
20		7	5	(2, 3)	[4; (5, 1)]	4.171		
21		9	1	(8, -7)	[6; 1, 14, (3, 15)]	2.935		
22		9	8	(1, 7)	[6; (15, 3)]	6.065		
23	23-32	8	3	(5, -2)	[3; 1, 1, (4)]	3.553	4	440
24		8	5	(3, 2)	[4; 2, (4)]	4.447		
25		9	2	(7, -5)	[3; 2, (1)]	3.382		

Ранговое распределение фиботипов, $a, b \in [-10, 10]$ (окончание).

Таблица: Ранговое распределение фиботипов, $a, b \in [-10, 10]$, ф/у (ч) — частота, ф/у (к) — кумулятивное распределение.

№	Ранг	Ф/т		$\chi(a,b) = a + b\frac{\Phi}{\sqrt{5}}$			Ф/у (ч)	Ф/у (к)
		y_0	y_1	(a, b)	Дробь			
26		9	4	(5, -1)	[4; 3, (1)]	4.276		
27		9	5	(4, 1)	[4; 1, 2, (1)]	4.724		
28		9	7	(2, 5)	[5; (1)]	5.618		
29		10	1	(9, -8)	[3; 4, (1, 2, 1, 3)]	3.211 3.211		
30		10	3	(7, -4)	[4; 9, (2, 8)]	4.106		
31		10	7	(3, 4)	[5; 1, (8, 2)]	5.894		
32		10	9	(1, 8)	[6; (1, 3, 1, 2)]	6.789		

Таблица: Перечень основных фиботипов $\Phi_{y_0+y_1}$.

фиботип	Ф	Л	Ф-3	Ф-4	Ф-5
(y_0, y_1)	(0, -1)	(2, 1)	(3, 1)	(3, 2)	(4, 1)
(a, b)	(-1, 2)	(1, 0)	(2, -1)	(1, 1)	(3, -2)
χ	0.447	1.000	1.276	1.724	1.553

фиботип	Ф-6	Ф-7	Ф-8	Ф-9	Ф-10
(y_0, y_1)	(4, 3)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)
(a, b)	(1, 2)	(4, -3)	(3, -1)	(2, 1)	(1, 3)
χ	2.447	1.829	2.276	2.724	3.171

Сопряженные фиботипы.

Definition

Два фиботипа, у которых коэффициенты b противоположны по знаку, называются *сопряженными*.

Имеют место следующие пары сопряженных фиботипов:

$$(\text{Ф-}3,\ \text{Ф-}4),\ (\text{Ф-}5,\ \text{Ф-}6),\ (\text{Ф-}7,\ \text{Ф-}10),\ (\text{Ф-}8,\ \text{Ф-}9).$$

при этом

$$\begin{aligned}
\chi_3 + \chi_4 &= 1.276 + 1.724 = 3, \quad & \chi_5 + \chi_6 = 1.553 + 2.447 = 4,\\
\chi_7 + \chi_{10} &= 1.829 + 3.171 = 5, \quad & \chi_8 + \chi_9 = 2.276 + 2.724 = 6.
\end{aligned}$$

Множество всех фиботипов может быть разбито на сопряженные классы.

Definition

Классы фиботипов C и C^*, $C \cap C^* = \varnothing$, называются *сопряженными*, если для любых $x \in C$ и $y \in C^*$ фиботипы x и y являются сопряженными. Если $x \in C$, $y \in C^*$, то $\chi_x + \chi_y = n \in \mathbb{N}$. Число n называется *индексом сопряженности* пары (C, C^*).

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Таблица: Сопряженные классы фиботипов, $a, b \in [-10, 10]$.

i	C_i	Ф/т	Дробь	C_i^*	Ф/т	Дробь
1 (0.447)	1	Φ_{1+1}	[0; 2 (4)]			
	6	Φ_{4+3}	[2; 2 (4)]	5	Φ_{4+1}	[1; 1, 1, (4)]
	24	Φ_{8+5}	[4; 2 (4)]	23	Φ_{8+3}	[3; 1, 1, (4)]
2 (0.276)	3	Φ_{3+1}	[1; 3 (1)]	4	Φ_{3+2}	[1; 1, 2, (1)]
	8	Φ_{5+2}	[2; 3 (1)]	9	Φ_{5+3}	[2; 1, 2, (1)]
	18	Φ_{7+3}	[3; 3 (1)]	19	Φ_{7+4}	[3; 1, 2, (1)]
	26	Φ_{9+4}	[4; 3 (1)]	27	Φ_{9+5}	[4; 1, 2, (1)]
3 (0.829)	7	Φ_{5+1}	[1; 1, 4, (1, 5)]	10	Φ_{5+4}	[3; (5, 1)]
	17	Φ_{7+2}	[2; 1, 4, (1, 5)]	20	Φ_{7+5}	[4; (5, 1)]
4 (0.106)	11	Φ_{6+1}	[2; 9, (2, 8)]	12	Φ_{6+5}	[4; 1, (8, 2)]
	30	Φ_{10+3}	[4; 9, (2, 8)]	31	Φ_{10+7}	[5; 1, (8, 2)]

Таблица: Сопряженные классы фиботипов, $a, b \in [-10, 10]$.

i	C_i	Ф/т	Дробь	C_i^*	Ф/т	Дробь
5 (0.382)	13	Φ_{7+1}	[2; 2, (1)]	14	Φ_{7+6}	[4; (1)]
	25	Φ_{9+2}	[3; 2, (1)]	28	Φ_{9+7}	[5; (1)]
6 (0.658)	15	Φ_{8+1}	[2; 1, 1, (1, 12, 1, 2, 2, 2)]	16	Φ_{8+7}	[5; (2, 1, 12, 1, 2, 2)]
7 (0.935)	21	Φ_{9+1}	[6; 1, 14, (3, 15)]	22	Φ_{9+8}	[6; (15, 3)]
8 (0.211)	29	Φ_{10+1}	[3; 4, (1, 2, 1, 3)]	32	Φ_{10+9}	[6; (1, 3, 1, 2)]

Сопряженные классы фиботипов: свойства.

Theorem

Имеют место следующие свойства классов C_i, $i = 1, \ldots, 8$:

1. *Если $x \in C$, $y \in C^*$, то период непрерывной дроби фиботипа x является циклической перестановкой периода соответствующей непрерывной дроби фиботипа y.*
2. *Если $i \neq 1$, то $|C_i| = |C_i^*|$.*

Remark

Утверждение 2 теоремы, т. е. неравенство $|C_1| \neq |C_1^*|$, объясняется спецификой класса C_1, состоящей в том, что он содержит фиботип Φ_{0+1}, занимающий, как и Φ_{2+1}, особое место в типологии фиботипов.

Продолжение неклассических фиботипов в отрицательную область.

Для неклассических фиботипов их знакочередующаяся часть по модулю представлена рядом, отличным от того, который представлен в знакопостоянной части. Именно, имеет место

Theorem

Если $\Phi_{k+l} \in C$, то существует фиботип $\Phi_{k+(k-l)} \in C^*$ такой, что

$$\Phi_{k+l,r} = (-1)^r \Phi_{k+(k-l),-r}, \quad k > 1, \quad r > 0. \tag{14}$$

Definition

Фиботипы Φ_{k+l} и $\Phi_{k+(k-l)}$, связанные соотношением (14), называются *сильно сопряженными*.

Remark

Из (14) при $k = 2$ и $l = 1$ следует равенство
$L_{-r} = (-1)^r L_r, \quad r > 0$, т. е. ряд Люка является *самосопряженным* Самосопряженным является и ряд Фибоначчи, если в качестве отношения сопряженности для него рассматривать формулу $F_{-r} = (-1)^{r+1} F_r, \quad r > 0$.

Пример: сильно сопряженные фиботипы Φ_{3+1} и Φ_{3+2}.

Example

Таблица: Элементы $L_r \in \Phi_{2+1}$ и $y_r \in \Phi_{3+1}$, $y_r \in \Phi_{3+2}$. Здесь Φ_{2+1} — самосопряженный фиботип, (Φ_{3+1}, Φ_{3+2}) — пара сильно сопряженных фиботипов: справедливо равенство $\Phi_{3+1,r} = (-1)^r \Phi_{3+2,-r}$.

r	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$L_r = \Phi_{2+1,r}$	-29	18	-11	7	-4	3	-1	2
$y_r = \Phi_{3+1,r}$	-50	31	-19	12	-7	5	-2	3
$y_r = \Phi_{3+2,r}$	-37	23	-14	9	-5	4	-1	3

r	1	2	3	4	5	6	7
$L_r = \Phi_{2+1,r}$	1	3	4	7	11	18	29
$y_r = \Phi_{3+1,r}$	1	4	5	9	14	23	37
$y_r = \Phi_{3+2,r}$	2	5	7	12	19	31	50

Таким образом, имеет место

Theorem

Сопряженные классы фиботипов C и C^* составлены из элементов, образующих пары $(x, x^*) \in C \times C^*$ сильно сопряженных фиботипов.

Глава 4. Прикладные задачи типологии фиботипов

Сонеты Мицкевича и Пушкина

Введение

Цель:

- Исследовать проявление гармонии строфического ритма в форме золотого сечения на примерах сонетов А. Мицкевича и А. С. Пушкина.
- Применительно к онегинской строфе этот вопрос исследован Гринбаумом (2000).
- Силлабо-тонический профиль сонета исследован Мартыненко (2009).

Литература

- *Гринбаум О. Н.* Гармония строфического ритма в эстетико-формальном измерении (на материале «Онегинской строфы» и русского сонета). — СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2000. — 160 с.
- *Мартыненко Г. Я.* Введение в теорию числовой гармонии текста. — СПб.: Изд-во СПб ун-та, 2009. — 252 с.

Пусть C — слоговый и T — тоновый объемы сонета соответственно. Тогда золотая пропорция объемов T и C определяется величиной

$$T^* = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \times C = 0.382 \times C.$$

Definition

$T_0 = [T^* + 0.5]$ — тоновый объем, отвечающий золотому сечению при слоговом объеме C, тройка $(T, C-T, C)$ определяет фиботип Φ_{a+b} описывающий *внешний ритм сонета*, т. е. ритм сонета в целом.

Example

В случае онегинской строфы $C = 118$, $T = 45$, $C - T = 73$, что определяет тройку чисел $(45, 73, 118) \in \Phi_{4+1}$.

Definition

Разностный индикатор

$$\Delta_{\text{внеш}}(C, T) = \left| \frac{C - T}{T} - \frac{C}{C - T} \right|.$$

— это *мера отклонения* внешнего ритма сонета от золотой пропорции Б/М = Ц/Б.

Пусть

- $T_{\text{катр}}$, $T_{\text{терц}}$ — тонические объемы катренов и терцетов соответственно.
- $T_{\text{катр}} + T_{\text{терц}} = T$.

Definition

Тройка $(T_{\text{терц}}, T - T_{\text{терц}}, T)$ описывает ритм, который называется *внутренним ритмом сонета*. Индикатор внутреннего ритма строится по тому же принципу, что и $\Delta_{\text{внеш}}(C, T)$, и имеет вид

$$\Delta_{\text{внут}}(T, T_{\text{терц}}) = \left| \frac{T - T_{\text{терц}}}{T_{\text{терц}}} - \frac{T}{T - T_{\text{терц}}} \right|.$$

Сонет А. Мицкевича «К Лауре» (перевод В. Левика)

Едва явилась ты — я был тобой пленен.
Знакомый взор искал я в незнакомом взоре.
Ты вспыхнула в ответ — так, радуясь Авроре,
Вдруг загорается раскрывшийся бутон.

Едва запела ты — я был заворожен,
И ширилась душа, забыв земное горе,
Как будто ангел пел, и в голубом просторе
Спасенье возвещал нам памятник времен.

Не бойся, милая, открой мне сердце смело,
Коль сердцу моему ответило оно.
Пусть люди против нас, пусть небо так велело,

И тайно, без надежд, любить мне суждено,
Пускай другому жизнь отдаст тебя всецело,
Душа твоя — с моей обручена давно.

Ритмико-гармонический анализ сонета А. Мицкевича «К Лауре», 6-стопный ямб.

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Ударность стопы							$T_{\text{стр}}$
I	II	III	IV	V	VI		
◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●		6
◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡ ●	◡	5
◡ ●	◡◡	◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡	4
◡◡	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡◡	◡ ●		3
					$T_{\text{катр}}$ =		18
◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●		5
◡ ●	◡◡	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡	5
◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡ ●	◡	5
◡ ●	◡◡	◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●		4
					$T_{\text{катр}}$ =		19
◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡	5
◡ ●	◡◡	◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●		4
◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡	6
					$T_{\text{терц}}$ =		15
◡ ●	◡◡	◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●		4
◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡	6
◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡ ●		5

Ритмико-гармонический анализ сонета А. Мицкевича «К Лауре» (продолжение).

Внешний ритм:

- $C = 175,\ T = 67,\ C - T = 108$ — слоговый и тоновый объемы;
- $(T, C - T, C) = (67, 108, 175)$ — тройка внешнего ритма.

Внутренний ритм:

- $T = T_{\text{катр}} + T_{\text{терц}} = 67,\ T_{\text{терц}} = 30,\ T_{\text{катр}} = 37$ — слоговый и тоновый объемы;
- $(T_{\text{терц}}, T_{\text{катр}} = T - T_{\text{терц}}, T) = (30, 37, 67)$ — тройка внутреннего ритма.

Индикаторы внешнего и внутреннего ритма сонета А. Мицкевича «К Лауре».

Индикаторы ритма:

- $\Delta_{\text{внеш}}(175, 67) = \left|\frac{175}{108} - \frac{108}{67}\right| = 0.008;$
- $\Delta_{\text{внут}}(67, 30) = \left|\frac{67}{37} - \frac{37}{30}\right| = 0.577.$

Вывод:

- Внешний ритм сонета близок к золотому сечению.
- Внутренний ритм сонета далек от золотого сечения.

Сонет А. С. Пушкина «Мадонна».

Не множеством картин старинных мастеров
Украсить я всегда желал свою обитель,
Чтоб суеверно им дивился посетитель,
Внимая важному сужденью знатоков.

В простом углу моем, средь медленных трудов,
Одной картины я желал быть зритель,
Одной: чтоб на меня с холста, как с облаков,
Пречистая и наш божественный спаситель —

Она с величием, он с разумом в очах —
Взирали, кроткие, во славе и в лучах,
Одни, без ангелов, под пальмою Сиона.

Исполнились мои желания. Творец
Тебя мне ниспослал, тебя, моя Мадонна,
Чистейшей прелести чистейший образец.

Ритмико-гармонический анализ сонета А. С. Пушкина «Мадонна».

Ударность стопы							$T_{\text{стр}}$
I	II	III	IV	V	VI		
●●	◡◡	◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●		5
◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡	6
◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡	4
◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡◡	◡ ●		4
					$T_{\text{катр}}$	$=$	19
◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●		5
◡ ●	◡◡	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡	5
◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●		5
◡ ●	◡◡	◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡	4
					$T_{\text{катр}}$	$=$	19
◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡◡	◡ ●		4
◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡◡	◡ ●		4
◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡	4
					$T_{\text{терц}}$	$=$	12
◡ ●	◡◡	◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●		4
◡ ●	◡◡	◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡	4
◡ ●	◡ ●	◡◡	◡ ●	◡◡	◡ ●		4

Внешний ритм:

- $C = 174,\ T = 62,\ C - T = 112$ — слоговый и тоновый объемы;
- $(T, C - T, C) = (62, 112, 174)$ — тройка внешнего ритма.

Внутренний ритм:

- $T = T_{\text{катр}} + T_{\text{терц}} = 62,\ T_{\text{терц}} = 24,\ T_{\text{катр}} = 38$ — слоговый и тоновый объемы;
- $(T_{\text{терц}}, T_{\text{катр}} = T - T_{\text{терц}}, T) = (24, 38, 62)$ — тройка внутреннего ритма.

Индикаторы внешнего и внутреннего ритма сонета сонета А. С. Пушкина «Мадонна».

Индикаторы ритма:

- $\Delta_{\text{внеш}}(174, 62) = \left|\frac{174}{112} - \frac{112}{62}\right| = 0.253;$
- $\Delta_{\text{внут}}(62, 24) = \left|\frac{62}{38} - \frac{38}{24}\right| = 0.048.$

Вывод:

- Внешний ритм сонета далек от золотого сечения.
- Внутренний ритм сонета близок к золотому сечению.

Таблица: Сравнение внешних и внутренних ритмов сонетов А. Мицкевича «К Лауре» и А. С. Пушкина «Мадонна».

Вид сечения	«К Лауре»	«Мадонна»
$C/T = T/(C-T)$	0.008	0.253
$T/T_{\text{катр}} = T_{\text{катр}}/T_{\text{терц}}$	0.577	0.048

Вывод:

- Мицкевич отдает предпочтение внешнему золотому сечению, а Пушкин — внутреннему,
- Каждый из поэтов достигает гармонии по одному показателю за счет отказа от гармонической структуры сонета по другому показателю.

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Динамическая организация текста рассказов Чехова

Основные предположения

- Динамика текста измеряется с помощью простейшей переменной — *размера предложения* по мере линейной развертки текста.
- Размер предложения измеряется количеством содержащихся в нем слов.
- Размер предложения, по мере развертки сюжета произведения ведет себя не случайно, а подчиняется некоторым скрытым закономерностям, регулируемым сложным переплетением содержательных факторов.
- В обстоятельных, описательных экспозиционных частях теста обычно используются «массивные», «тяжелые» предложения, а в напряженных, конфликтных частях — короткие, «рваные», «телеграфные» предложения.

План исследования.

Рассматриваются пять рассказов Чехова:

- "Переполох" (1886),
- "Актерская гибель" (1886),
- "Пересолил" (1885),
- "Страх" (1892),
- "Скрипка Ротшильда" (1894).

Методика исследования.

- В каждом рассказе фиксируются размеры каждого предложения. В упрощенном варианте рассматривается только авторская речь.
- Линейная последовательность значений размеров предложений в каждом рассказе подвергается тесту на случайность с целью обретения уверенности в том, что эти значения образуют неслучайную последовательность.
- Вся линейная последовательность предложений и абзацев разбивается на 10 частей и в каждой из них подсчитывается среднее значение соответствующего параметра. Скажем, если в авторской речи содержится 100 предложений, то это множество разбивается на 10 следующих друг за другом частей, в каждой из которых подсчитывается среднее значение количества слов. Этим достигается первичное сглаживание данных.

Методика исследования (окончание).

- На основании средних значений строится временной ряд, в котором в качестве независимой переменной выступает *номер отрезка текста*, а в качестве зависимой переменной — *средний размер предложения* в этом отрезке.
- Полученные значения средних величин в каждом ряду подвергаются выравниванию с помощью одного из вариантов метода скользящих средних.
- Для каждого рассказа и для всего корпуса в целом строются динамические кривые, отражающие изменения переменных по мере развития сюжета, начиная от экспозиции и завязки через развитие действия к конфликту (кульминации) и развязке.

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Анализ рассказа А. П. Чехова «Переполох»

- Фиксируем размеры $x_1, x_2, \ldots, x_n$ предложений в той последовательности, в какой они следуют в рассказе «Переполох», т. е. в естественной последовательности.
- В авторской речи число предложений равно $n = 79$.
- Полученные числа x_i располагаем в порядке возрастания, т. е. образуем вариационный ряд, и находим медиану x_{med}. В нашем случае $x_{\text{med}} = 12$.
- Возвращаемся к естественной последовательности и вместо каждого x_i ставим «плюс», если $x_i > x_{\text{med}}$ и «минус», если $x_i < x_{\text{med}}$ (элементы выборки, равные x_{med} опускаем).

Последовательность шагов методики (продолжение).

- Полученная последовательность плюсов и минусов характеризуется параметрами: $\nu(n)$ — общее *число серий*, $\tau(n)$ — *протяженность самой длинной серии* («серия» — последовательность подряд идущих плюсов или минусов.
- Если выборка случайна, то чередование плюсов и минусов *случайно*, т. е. последовательность не содержит слишком длинных серий, и общее число серий не слишком мало.
- Согласно критерию случайности (Айвазян и др.), гипотеза о случайности результатов наблюдения отвергается с вероятностью между 0.05 и 0.0975, если нарушается хотя бы одно из неравенств

$$\begin{aligned} \nu(n) &> [0.5(n+1-1.96\sqrt{n-1})], \\ \tau(n) &< [3.3\log_{10}(n+1)] \end{aligned}$$

Таблица: Стилеметрический анализ рассказа А. П. Чехова «Переполох»: d_i — длина i-предложения, $\{a_i = \pm, i = 1, \ldots 79\}$ — последовательность знаков.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_i	22	10	2	8	3	25	3	2	12	32
a_i	+	−	−	−	−	+	−	−		+

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d_i	5	43	21	10	19	26	7	23	7	11
a_i	−	+	+	−	+	+	−	+	−	−

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
d_i	11	13	6	17	11	2	24	9	10	4
a_i	−	+	−	+	−	−	+	−	−	−

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
d_i	17	13	7	12	6	38	4	14	12	8
a_i	+	+	−		−	+	−	+		−

Таблица: Стилеметрический анализ рассказа А. П. Чехова «Переполох»: d_i — длина i-предложения, $\{a_i = \pm, i = 1, \ldots 79\}$ — последовательность знаков.

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
d_i	28	37	10	16	6	9	12	9	4	17
a_i	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$		$-$	$-$	$+$
i	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
d_i	16	12	15	7	11	25	26	28	18	18
a_i	$+$		$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
i	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
d_i	16	16	28	7	15	16	5	15	2	11
a_i	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
i	71	72	73	74	75	76	77	78	79	
d_i	10	4	9	2	18	19	25	16	7	
a_i	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	

Значения статистик $\nu(n)$ и $\tau(n)$.

Согласно табл. 19 имеем:

- $n = 79$ — число предложений,
- $\nu(79) = 38$ — общее число серий,
- $\tau(79) = 8$ — максимальная длина серии.

Сглаживание данных методом скользящего среднего.

Метод сглаживания:

- Абсолютные данные заменяются средними арифметическими, относящимися к фиксированному интервалу.
- Интервалы выбираются способом скольжения, т. е. постепенно исключаются из интервала первые уровни и подключаются последующие.
- Скользящие средние вычисляются по формулам:

$$y_{i+1} = \frac{x_i + x_{i+1} + x_{i+2}}{3}, \quad i = 1, \ldots, 8.$$

Например,

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{9.80 + 20.1 + 9.8}{3} = 13.2, \\ y_3 &= \frac{20.1 + 9.8 + 11.3}{3} = 13.7 \end{aligned}$$

и т. д.

Метод сглаживания:

- При сглаживании динамических рядов методом скользящих средних концы рядов остаются незаполненными. Этот недочет устраняется с помощью соответствующих формул:
- первое значение, прибавляемое к началу ряда, вычисляется по формуле

$$y_1 = \frac{2x_1 + x_2 - x_4}{2},$$

так что $y_1 = 14.2$, а последнее — по формуле

$$y_{10} = \frac{2x_{10} + x_9 - x_8}{2},$$

так что $y_{10} = 11.6$.

- Процедуру выравнивания осуществляем два раза.

Обработанные данные.

Таблица: Динамический ряд средних размеров предложения в рассказе Чехова «Переполох», x_i — средний размер предложения (эмпирический), y_i — средний размер предложения (выровненный).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	9.80	20.1	9.80	11.3	15.3	12.9	13.4	20.0	9.60	13.5
y_i	14.4	13.9	13.0	13.0	13.0	14.2	14.5	14.7	13.4	12.4

- Динамический ряд, представленный в последней строке табл. 20, имеет немонотонный характер, напоминающий график кубической параболы с двумя экстремумами.
- Выравнивая его методом наименьших квадратов, получаем

$$z_1 = -0.0524y^3 + 0.8276y^2 - 3.7021y + 17.9159. \qquad (15)$$

- Парабола (15) представлена на рис. 9.

Парабола (15).

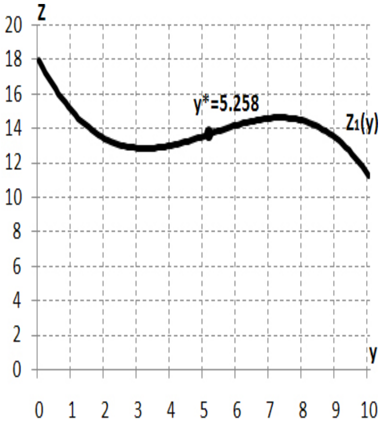

Рис.: Рассказ «Переполох», парабола (15).

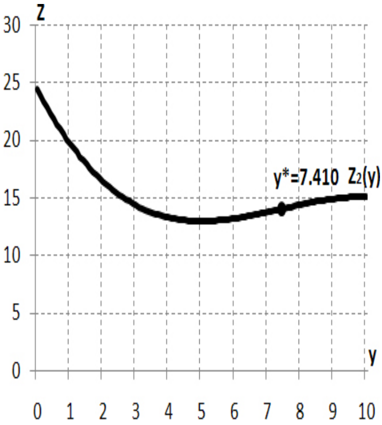

Рис.: Рассказ «Актерская гибель», парабола (16).

«Реальные» события рассказа «Переполох».

Попытаемся теперь привязать к извилистому,

волнообразному контуру параболы (15) «реальные» события этого рассказа, а также структурно-композиционные компоненты, отражающие развитие действия.

Структурно-композиционные компоненты рассказа «Переполох».

На начальном участке 1-3 (экспозиция, зачин)

имеет место движение от высоких значений среднего размера предложения к локальному минимуму. Этот участок соотносится с *экспозицией* (краткой характеристикой героини-гувернантки и переполохом, вызванным пропажей хозяйской брошки). Здесь происходит постепенное сокращение размера предложения на фоне увеличения размера абзаца, т. е. слог становится более напряженным и динамичным.

На втором участке 3-8 (развитие действия, конфликт, включая кульминацию)

дело о краже разрастается, обогащается сопутствующими обстоятельствами, в них включается обширная палитра переживаний героини. Здесь идут в ход более длинные, насыщенные предложения при одновременном сокращении размера абзаца.

Структурно-композиционные компоненты рассказа «Переполох».

На третьем участке 8-10 (развязка)

дело разрешается саморазоблачением преступника
и решительным отъездом героини: «Через полчаса она уже была в дороге».

Общие тенденции динамического контура рассказов Чехова.

До сих пор мы говорили об одном рассказе.

Можно ожидать, что динамический контур в других рассказах

будет идентичным. Как показано в (Мартыненко, 2009), эта тенденция действительно сохраняется, но только в случае если в корпус текстов включаются рассказы, относящиеся к одному и тому же периоду творчества писателя. Поступая таким образом, приведем данные для еще четырех чеховских произведений, см. итоговую табл. 21.

Таблица: Динамические ряды средних размеров предложения в рассказах А. П. Чехова: (1) «Переполох» (1886), (2) «Актерская гибель» (1886), (3) «Пересолил» (1885), (4) «Страх» (1892), (5) «Скрипка Ротшильда» (1894).

	Участки									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	14.4	13.8	13.3	13.0	13.4	13.9	14.5	14.2	13.5	12.6
2	19.4	16.8	14.7	13.0	12.7	12.9	14.0	14.6	14.9	14.9
3	16.3	15.0	14.2	12.1	12.2	12.4	14.0	15.0	13.2	10.9
4	30.1	25.4	21.0	17.5	15.3	14.5	13.7	13.2	12.0	11.2
5	19.8	18.7	17.5	16.5	15.4	15.6	16.1	17.3	18.7	19.9

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

- Из табл. 21 следует, что второй и третий рассказы («Актерская гибель» и «Пересолил»), относящиеся к тому же периоду творчества Чехова, что и «Переполох» (1885-86 гг.), имеют идентичную геометрию.
- Уравнения соответствующих им парабол имеют вид

$$
\begin{aligned}
z_2 &= -0.0373y^3 + 0.8303y^2 - 5.5065y + 24.4066, \quad (16) \\
z_3 &= -0.0565y^3 + 0.9842y^2 - 5.1819y + 21.2300. \quad (17)
\end{aligned}
$$

- Соответствующие параболы (16) и (17) представлены на рис. 10 и 11.

Парабола рассказа «Пересолил» и усредненная парабола трех рассказов.

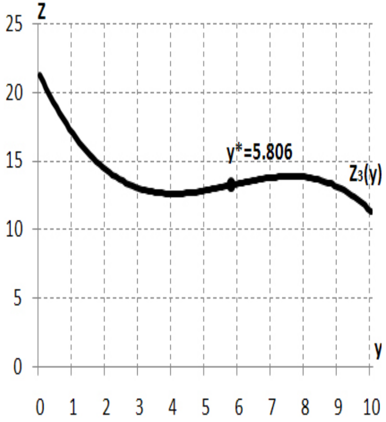

Рис.: Рассказ «Пересолил», парабола (17).

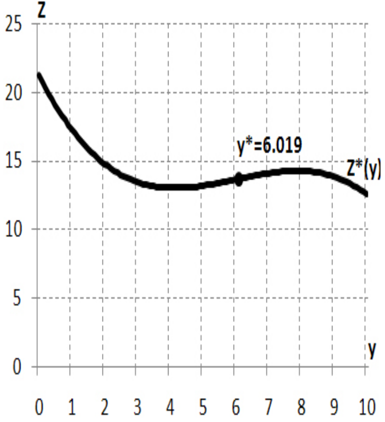

Рис.: Усреднение трех рассказов, парабола (18).

Обсуждение полученных результатов (продолжение).

Первые три рассказы сходны в том, что:

- На начальном участке (экспозиция и зачин) они имеют нисходящую геометрию, т. е. Чехов начинает повествование приблизительно в одной и той же манере.
- После прохождения точки минимума напряжение рассказов постепенно нарастает и достигает кульминации.
- Характерной точкой рассказов является точка перегиба $y^\star$, в которой участок выпуклости параболы сменяется участком вогнутости.

Из уравнений (15)-(17) находим

$$y_1^\star = 5.258, \quad y_2^\star = 7.410, \quad y_3^\star = 5.806.$$

Отсюда, после усреднения *точек перегиба* и масштабирования, находим обобщенную точку перегиба

$$y^\star = \frac{1}{3}(0.5258 + 0.7410 + 0.5806) = 0.6158,$$

Обсуждение полученных результатов (продолжение).

С другой стороны,

- *усредняя уравнения парабол* (15)-(17), приходим к обобщенной параболе

$$z = -0.04877y^3 + 0.8807y^2 - 4.7968y + 21.1841, \quad (18)$$

точка перегиба которой $y^\star = 6.019$.

- Парабола (18) показана на рис. 12.

Таким образом,

чеховский рассказ в динамической развертке в среднем тяготеет к золотому сечению

.

Обсуждение полученных результатов (окончание).

Два последних рассказа «Страх» (1892) и «Скрипка Ротшильда» (1894),

имеют существенно другую геометрию и не выравниваются параболой третьей степени.

В геометрии динамических рядов различных авторов

однообразия нет. Геометрических фигур довольно много, и за каждой из них скрываются те или иные повороты сюжета. Одну из таких фигур мы и обсудили на примере трех рассказов, относящихся к раннему периоду творчества Чехова.

О композиции «Слова о полку Игореве»

В интересном новом прочтении Е. В. Лукиным «Слова о полку Игореве» (далее — «Слово»)

автор данного перевода включает в текст «Слова» известный средневековый памятник «Слово о погибели Русской земли», считая, что это — утраченный фрагмент «Слова» и что именно эти два текста составляют художественное целое.

Слово о полку Игореве

/ Переложение Евгения Лукина. — М.: АСЕ; Астрель-СПб, 2006. — 112 с.

Мнение о том, что такой вариант возможен, существует.

В частности, этой позиции придерживается акад. Б. А. Рыбаков. В целом, это спорный тезис, так как до сих пор неизвестно, располагаем ли мы относительно целостным текстом «Слова» или текстом с перепутанными страницами, переделкой древнерусского оригинала, пропусками, произвольными вставками и т. д.

Перепутанные страницы. О первоначальной конструкции «Слова о полку Игореве». — С. 25-67.

Рыбаков Б. А. — В кн.: «Слово о полку Игореве» и его время. — . Сб. статей / Отв. ред. акад. Б. А. Рыбаков. — М.: Наука. АН СССР. НС по истории мировой культуры. Секция по культуре древней Руси, 1985. — 416 с.

Кульминация «Слова» согласно Гаспарову.

Согласно Гаспарову и другим исследователям «Слова»,

сон Святослава и ответ бояр являются трагической кульминацией произведения, в которой рисуется катастрофа: смерть великого князя и гибель мира.

Гаспаров Б. М.

Поэтика «Слова о полку Игореве». — М.: Аграф, 2000. — 608 с.

Как показывает анализ канонического текста «Слова»

и его поэтических переложений, см. таблицу, построенную согласно приводимому ниже источнику, кульминация в нем наступает в точке, примерно равной 0.45 (отношение количества условных строк до кульминации к общему числу строк):

Слово о полку Игореве:

Сборник / Вступит. статьи Д. С. Лихачева и Л. А. Дмитриева; Сост. Л. А. Дмитриева, Д. С. Лихачева, О. В. Творогова. — Л.: Сов. писатель, 1985. — 498 с. (Б-ка поэта. Большая сер.).

Таблица: анализ переводов «Слова».

Стилеметрический анализ переводов «Слова».

Лихачев	Жуковский	Деларю	Майков
307/693 0.443	255/554 0.460	158/353 0.447	287/632 0.454
Бальмонт	Шервинский	Стеллецкий	Заболоцкий
182/387 0.470	445/944 0.471	238/507 0.469	344/753 0.457
Шклярев-ский	Рыльский	Купала	Лукин
287/641 0.448	329/732 0.449	360/806 0.446	258/570 0.453

Таким образом:

- Все поэты одинаково точно выдерживают пропорцию первоисточника.
- Наличие вставки, сделанной Лукиным перед плачем Ярославны («Слово о погибели...», 12-ая глава, 48 строк), сдвигает точку кульминации «Слова» к началу (0.417 вместо 0.453, т. е. ближе к точке $1 - \varphi = 0.382$).
- В соответствии с общими эстетическими представлениями о гармонии художественных произведений (см., например, Гаспаров (2000): с. 12-15, 325-362), это делает общую структуру «Слова» более гармоничной.

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Гармоническая композиция «Слова» в прочтении Лукина.

	Главы (a)	Строфы (b)	$\frac{a+b}{2}$	$\sqrt{ab}$
Без вставки	$6/16 = 0.375$	$43/95 = 0.453$	0.414	0.412
Со вставкой	$6/17 = 0.353$	$43/103 = 0.417$	0.385	0.384

Карпунин Г. Ф., исследуя жанровую структуру поэмы,

делает интересное наблюдение. Он считает, что вся поэма делится на три части:

- первая часть вплоть до поражения Игоря в битве — это преимущественно *повесть*;
- вторая часть (сон Святослава и т. д.), лишенная всякого действия, принадлежит к жанру *слова*;
- третья часть, включающая плач Ярославны, бегство Игоря из плена и т. д. — это преимущественно *песнь*.

С этой точки зрения вставка «Слова о погибели...» во вторую часть поэмы оказывается весьма логичной.

Карпунин Г. Ф.

Жемчуг «Слова», или возвращение Игоря. — Новосибирск: Зап.-Сиб. книжное изд-во, 1983. — 382 с.

Спасибо за внимание!

Критерий A-оптимальности

Положим

- γ – *навигационный параметр* (угол между направлением на первый маяк a_1 и направляющим вектором $q = a_2 - a_1$ прямой Ω);
- ω – *угол засечки* (угол между направлениями на маяки).

Прямыми вычислениями при фиксированном $a_1 \in \Omega$ и свободном $a_2 \in \Omega$ маяках находим

$$\mathrm{tr} M^{-1}(\xi; b) = \frac{1}{\|a_1\|^2} \left(\frac{\sin^2(\omega + \gamma)}{\sin^2 \omega \sin^2 \gamma} + \frac{1}{\sin^2 \omega} \right). \qquad (19)$$

Таким образом,

- критерий A-оптимальности (19) зависит от навигационного параметра γ .

Теорема 2: A-оптимальное размещение маяков на прямой Ω

Theorem

Пусть $\xi = \{a_1, a_2\}$ *– план размещения маяков на прямой* Ω. *Имеют место следующие утверждения:*

- *если* $B \notin \Omega$ *и* $\gamma = \frac{\pi}{2}$, *то* A*-оптимальным является план*

$$\xi_A = \arg\max_{\omega \in \Omega} \left| trM^{-1}(\xi;\gamma) \right| = \{\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = \beta\};$$

- *если* $B \notin \Omega$ *и* $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$, *то функция* $trM^{-1}(\xi;\gamma)$ *унимодальна по* ω, *и* A*-оптимальные углы засечки* $\omega^*(\gamma)$ *могут быть найдены численно.*

Пример: A-оптимальное размещение маяков на прямой Ω. Точные планы.

- γ – навигационный параметр (мешающий параметр),
- $\omega = k\pi$ – A-оптимальный угол засечки, определящий положение второго маяка.

A-оптимальные планы, $\gamma = a\pi$, $\omega = k\pi$, $\|a_1\| = 1$.

ξ:

γ	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0
k	∞	0.5333	0.6109	0.6919	0.81660	1.0
$\mathrm{tr}M^{-1}(\xi)$	1.0	1.0528	1.2639	1.9472	5.7361	∞

Вывод:

- Если $\gamma = \pm\frac{1}{2}$, то $\mathrm{tr}M^{-1}(\xi;\beta) = 1$ – вырожденный навигационный треугольник;
- Если $\gamma = 1$, то $\mathrm{tr}M^{-1}(\xi;\beta) = \infty$ – вырожденный случай (маяки и объект на одной прямой).

Непрерывное A-оптимальное планирование

Рассмотрим *непрерывный* план эксперимента

$$\xi = pa_1 + (1-p)a_2, \quad p \in [0,1].$$

- Обозначим

$$A = \sin^2(\omega+\gamma), \quad B = \sin^2\gamma, \quad C = \sin^2\omega.$$

- Функционал $\mathrm{tr}M^{-1}(\xi;\beta)$, аналогичный (19), имеет вид

$$\mathrm{tr}M^{-1}(\xi;\beta) = \frac{1}{\|a_1\|^2}\frac{p^2A+(1-p)^2B}{p^2(1-p)^2BC}. \tag{20}$$

- Функционал $\mathrm{tr}M^{-1}(\xi;\beta)$ является выпуклым по p, и, следовательно, для каждого γ существуют непрерывные планы $\xi^*(\gamma)$.

Минимизируемый функционал

Положим $\|a_1\| = 1$. Минимизируя (20) по p, получаем оптимальное значение

$$p^* = \frac{\sqrt[3]{B}}{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}}. \tag{21}$$

Отсюда, подставив (21) в (20), находим A-функционал, подлежащий минимизации по ω:

$$\mathrm{tr} M^{-1}(\omega;\gamma) = \frac{(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B})^3}{BC}. \tag{22}$$

В области $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ функционал $\mathrm{tr} M^{-1}(\omega;\gamma)$ не является гладким по ω. Именно, в точке минимума

$$\omega^* = \arg \min_{\omega \in [0, \frac{\pi}{2}]} \mathrm{tr} M^{-1}(\omega, p^*;\gamma),$$

которая всегда существует, функционал $\mathrm{tr} M^{-1}(\omega;\gamma)$ недифференцируем, при этом он вогнут по

$$\omega \in (0, \omega^*) \cap (\omega^*, \frac{\pi}{2}) \text{ для всех } \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Example

Пример: A-оптимальные непрерывные планы размещения маяков на прямой Ω.

A-оптимальные планы, $\gamma = a\pi$, $\omega = k\pi$, $\|a_1\| = 1$.

$\xi^*(\beta)$:

Заданный курс		Угол засечки		Вес	Критерий
γ, рад	γ, град	ω^*, рад	ω^*, град	p^*	$\mathrm{tr} M^{-1}(\omega^*;\gamma)$
0.1π	18°	0.9π	162°	0.99950	10.4854
0.4π	72°	0.6π	108°	0.99967	1.10665

- При $\gamma \to \frac{\pi}{2}$ угол засечки ω^* стремится к прямому.
- Больший вес всегда имеет тот маяк, который находится ближе к объекту.

Пусть область $\Omega \subset R^2$ – дуга эллипса:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y) \in R^2 : \\ &x = a\cos\varphi,\ \ y = b\sin\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi\}, \\ &a \ge b > 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Обозначим

- $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ – *эксцентриситет эллипса* Ω, $0 \le e < 1$.
- $\lambda = 1 - e^2$ – топологический параметр,

Первый маяк разместим в точке $a_1 = (a, 0)$.

Критерии D- A-оптимальности

- Для двухточечных планов размещения маяков

$$\xi = \{\omega_1 = 0, \omega_2 = \omega(\lambda)\}$$

выражения для определителя $|M(\omega;\lambda)|$ и следа $\mathrm{tr}M^{-1}(\omega;\lambda)$ принимают вид

$$|M(\omega;\lambda)| = a^4(\cos^2\omega + \lambda\sin^2\omega)\sin^2\omega, \tag{24}$$

$$\mathrm{tr}M^{-1}(\omega;\lambda) = \frac{1+\cos^2\omega + \lambda\sin^2\omega}{a^2(\cos^2\omega + \lambda\sin^2\omega)\sin^2\omega}. \tag{25}$$

где полагаем $\omega := \omega(\lambda)$.

- Таким образом, критерии оптимальности (24) и (25) зависят от параметра λ.

Теорема 3: D- и A-оптимальные планы размещения маяков на эллипсе.

Theorem

Пусть $k \in (0,1)$ – характеристическая константа ($k = \frac{1}{2}$ – критерий D-оптимальности, $k = \sqrt{2} - 1$ – критерий A-оптимальности), $a_i \in \Omega$, $i = 1, 2$. Тогда

- *оптимальный угол засечки имеет вид*

$$\omega(\lambda) = \begin{cases} \omega_1 = arctg\sqrt{\frac{1-k}{k-\lambda}},\ \omega_2 = \pi - \omega_1, & \lambda < k, \\ \frac{\pi}{2}, & \lambda \geq k; \end{cases} \tag{26}$$

- *функция $\lambda(\omega) = \omega^{-1}(\lambda)$ имеет вид*

$$\lambda(\omega) = k - (1-k)ctg^2\omega,\ \omega_1 \leq \omega < \omega_2. \tag{27}$$

Example

Пример: D-оптимальные планы размещения маяков на эллипсе Ω.

D-оптимальные планы, $\omega_i = k_i\pi$, $i = 1, 2$, $\|a_1\| = 1$.

λ	$\omega_i = k_i\pi$, рад		ω_i, град		Критерий
	k_1	k_2	ω_1	ω_2	$\|M(\omega^*;\lambda)\|$
0.01	0.2516	0.7884	45.2880°	134.7120°	0.2525
0.04	0.2566	0.7434	46.1880°	133.8120°	0.2604
0.09	0.2658	0.7342	47.8440°	132.1560°	0.2747
0.16	0.2805	0.7195	50.4900°	129.5100°	0.2976
0.25	0.3041	0.6959	54.7380°	125.2620°	0.3334
0.36	0.3451	0.6549	62.1180°	117.8820°	0.3906
$\lambda = \frac{1}{2}$	0.5	0.5	90°	90°	0.5000
$\lambda > \frac{1}{2}$	0.5	0.5	90°	90°	λ

Example

Пример: A-оптимальные планы размещения маяков на эллипсе Ω.

A-оптимальные планы, $\omega_i = k_i\pi$, $i = 1, 2$, $\|a_1\| = 1$, $\lambda^* = \sqrt{2} - 1$.

λ	$\omega_i = k_i\pi$, рад		ω_i, град		Критерий
	k_1	k_2	ω_1	ω_2	$\mathrm{tr}M^{-1}(\omega^*;\lambda$
0.01	0.2794	0.7206	50.2842°	129.7158°	5.7701
0.04	0.2854	0.7146	51.3659°	128.6341°	5.5953
0.09	0.2964	0.7036	53.3525°	126.6475°	5.3039
0.16	0.3146	0.6854	56.6246°	123.3754°	4.8959
0.25	0.3450	0.6550	62.1004°	117.8996°	4.3713
$\lambda = \lambda^*$	0.5	0.5	90°	90°	3.4142
$\lambda > \lambda^*$	0.5	0.5	90°	90°	$1 + \lambda^{-1}$

Выводы:

Анализ полученных решений позволяет сделать следующие выводы:

- оба критерия $|M(\omega^*;\lambda)|$ и $\mathrm{tr}M^{-1}(\omega^*;\lambda)$ дают два равнозначных решения $\omega_1 = k_1\pi$, $\omega_2 = k_2\pi$ при $k < \frac{1}{2}$ и $k < \sqrt{2}-1$ соответственно, симметричные относительно $\omega = \frac{\pi}{2}$, при этом $k_1 + k_2 = 1$.
- в случае $k \geq \frac{1}{2}$ и $\lambda \geq \sqrt{2}-1$ значение $\omega^* = \frac{\pi}{2}$ соответствует единственному максимуму функционала $|M(\omega;\lambda)|$ и минимуму функционала $\mathrm{tr}M^{-1}(\omega;\lambda)$.

Это означает, что

- точки $\lambda^* = \frac{1}{2}$ и $\lambda^* = \sqrt{2}-1$ являются точками ветвления функции $\omega = \omega(\lambda)$, заданной неявно *уравнением разветвления* (Вайнберг, Треногин, 1968)

$$F(\omega;\lambda) := k - \cos^2\omega - \lambda\sin^2\omega = 0. \tag{28}$$

Предположим, что объект B и маяки $A_1, \ldots, A_n$ размещаются на концентрических окружностях. Обозначим:

- окружность с радиусом $r > 0$ и центром $x_0 \in R^2$

$$\sigma_r(x_0) = \{x \in R^2 : \|x - x_0\| = r\} \tag{29}$$

- $\sigma_r(0)$ – окружность с центром $x_0 = \mathcal{K}(O)$;
- область размещения маяков $\Omega \subset R^2$ – окружность

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2 : x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Обозначим

- $$b = (R\cos\alpha, R\sin\alpha) \in \sigma_R(0)$$

  – положение объекта B;
- $$\xi(\lambda) = \{\varphi_1, \varphi_2\}$$

  – план размещения маяков A_1, A_2, соответствующий их точкам стояния $a_i = (r\cos\varphi_i, r\sin\varphi_i) \in \sigma_r(0)$, $i = 1, 2$;
- $$\lambda = (R, r, \alpha) \in R^3$$

  – навигационный параметр, характеризующий задачу о *размещении двух маяков*.

Положим

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi := \omega = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Тогда

$$|M(\varphi;\lambda)| = 2(1-\cos\varphi)\left\{R\cos\left(\alpha-\frac{\varphi}{2}\right)-r\cos\frac{\varphi}{2}\right\}^2, \tag{30}$$

$$\mathrm{tr}M^{-1}(\varphi;\lambda) = \frac{2\left\{(R^2-2Rr\cos\frac{\varphi}{2}\cos(\alpha-\frac{\varphi}{2})+r^2\right\}}{|M(\varphi;\lambda)|}. \tag{31}$$

Теорема 4: D-оптимальные планы размещения двух маяков на окружности

Theorem

Пусть выполнены следующие условия:

- *задано положение объекта* $b = (R\cos\alpha, R\sin\alpha) \in \sigma_R(0)$;
- *зафиксирован маяк* $a_1 = (r, 0) \in \sigma_r(0)$.

Тогда D-оптимальный план $\xi^*(\lambda) = \{0, \varphi^*(\lambda)\}$,
максимизирующий определитель (30), *имеет вид*

$$\varphi^*(\lambda) = \arg \max_{0 \le \varphi \le \pi} |M(\varphi; \lambda)| = \pi - arctg\left(\frac{\cos\alpha - r/R}{\sin\alpha}\right). \quad (32)$$

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

- Не удается найти в явном виде выражение для двухточечного A-оптимального плана $\varphi^*(\lambda)$ согласно критерию (31), т.е. $\mathrm{tr} M^{-1}(\varphi; \lambda)$.

D-оптимальное размещение двух маяков на окружности: $A_1(r,0)$, $A_2(r\cos\omega, r\sin\omega) \in \sigma_r(0)$, $\omega = k\pi$.

Example

Объект $B(R\cos\alpha, R\sin\alpha) \in \sigma_R(0)$, $\alpha = z\pi$, $r = 1$, $R = 2$.

z	Координаты объекта		Второй маяк		
	$\beta_1 = R\cos\alpha$	$\beta_1 = R\cos\alpha$	k	$\omega = k\pi$	$\lvert M(\xi;\lambda)\rvert$
0.0	2.000	0.000	0.500	1.570	1.000
	2.000	0.000	1.500	270.0	1.000
0.2	1.618	1.175	0.845	152.27	6.268
0.4	0.618	1.902	1.063	191.35	14.76
0.5	0.000	2.000	1.147	206.56	17.94
	0.000	2.000			
0.6	-0.618	1.902	1.224	220.38	19.35
0.8	-1.618	1.175	1.366	245.81	16.36
1.0	2.000	0.000	0.500	90.00	9.000
	2.000	0.000	1.500	270.0	9.000

A-оптимальное размещение двух маяков на окружности: $A_1(r,0)$, $A_2(r\cos\omega, r\sin\omega) \in \sigma_r(0)$, $\omega = k\pi$.

Ю.Д. Григорьев[1] и Г.Я. Мартыненко[2]

Глава 1. Необходимые математические сведения

Глава 2. Типология последовательностей Фибоначчи

Глава 4. Прикладные задачи типологии фиботипов

Example

Объект $B(R\cos\alpha, R\sin\alpha) \in \sigma_R(0)$, $\alpha = z\pi$, $r = 1$, $R = 2$.

z	Координаты объекта		Второй маяк		
	$\beta_1 = R\cos\alpha$	$\beta_1 = R\cos\alpha$	k	$\omega = k\pi$	$\mathrm{tr}M^{-1}(\xi;\lambda)$
0.0	2.000	0.000	0.375	1.179	5.236
0.2	1.618	1.175	0.663	119.3	1.201
0.4	0.618	1.902	0.927	166.9	0.677
0.5	0.000	2.000	1.034	186.1	0.622
0.6	-0.618	1.902	1.129	203.2	0.631
0.8	-1.618	1.175	1.298	233.7	0.834
1.0	-2.000	0.000	1.453	261.6	1.523

Example

Объект $B(R\cos\alpha, R\sin\alpha) \in \sigma_R(0)$, $\alpha = z\pi$, $r = 1$, $R = 2$.

z	Координаты объекта		Третий маяк		
	$\beta_1 = R\cos\alpha$	$\beta_1 = R\cos\alpha$	k	$\varphi = k\pi$	$\lvert M(\xi;\lambda)\rvert$
0.0	2.000	0.000	0.500	90.000	10.00
	2.000	0.000	1.500	270.00	10.00
0.2	1.618	1.175	1.631	293.73	21.91
0.4	0.618	1.902	1.729	311.38	34.47
0.5	0.000	2.000	1.768	318.19	34.67
	0.000	2.000	1.232	221.81	34.67
0.6	-0.618	1.902	1.270	228.62	34.47
0.8	-1.618	1.175	1.369	246.38	21.91
1.0	2.000	0.000	0.500	90.000	10.00
	2.000	0.000	1.500	270.00	10.00

Example

Объект $B(R\cos\alpha, R\sin\alpha) \in \sigma_R(0)$, $\alpha = z\pi$, $r = 1$, $R = 2$.

	Координаты объекта		Третий маяк		
z	$\beta_1 = R\cos\alpha$	$\beta_1 = R\cos\alpha$	k	$\varphi = k\pi$	$\mathrm{tr}M^{-1}(\xi;\lambda)$
0.0	2.000	0.000	–	–	–
0.2	1.618	1.175	0.235	42.25	1.798
0.4	0.618	1.902	0.427	76.83	0.678
0.5	0.000	2.000	0.500	90.00	0.611
0.6	-0.618	1.902	0.573	103.2	0.678
0.8	-1.618	1.175	0.765	137.7	1.798
1.0	-2.000	0.000	–	–	–

Рассмотрим теперь *обратную* задачу:

- при заданных положениях маяков A_1, $A_2 \in \sigma_r(0)$ найти положение объекта $B(\beta_1, \beta_2) \in \sigma_R(0)$, максимизирующее определитель (30).

Теорема 5: D-оптимальное размещение объекта в случае двух фиксированных маяков

Theorem

Пусть выполнены следующие условия:

- $\{A_1(r,0), A_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \sigma_r(0)\}$ – *заданные маяки;*
- $B(R\cos\alpha, R\sin\alpha) \in \sigma_R(0)$ – *объект;*
- $\lambda = (\varphi, r, R)$ – *вектор мешающих параметров.*

Тогда

- $|M(\alpha;\lambda)| = 2(1-\cos\varphi)\Big\{R\cos\Big(\alpha - \frac{\varphi}{2}\Big) - r\cos\frac{\varphi}{2}\Big\}^2;$
-

$$\alpha^*(\varphi) = \arg\max_{0\le\alpha\le 2\pi} |M(\alpha;\varphi)| = \begin{cases} 0, & \varphi = 0, \\ \varphi/2+\pi, & 0<\varphi\le\pi, \\ \varphi/2, & \pi\le\varphi<2\pi. \end{cases} \quad (33)$$

Спасибо за внимание!